ضمیمه (الف)

ماتریس‌ها و خواص آنان

در تحلیل مدارهای الکتریکی با روش‌های گره، حلقه و دیگر روش‌ها، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی ایجاد می‌شوند که باید این دسته معادلات را حل کرد. این دسته معادلات را می‌توان به روش‌های ماتریسی حل نمود. بدین منظور در این ضمیمه، خصوصیات ماتریس‌ها و جبر ماتریسی را بیان می‌نماییم.

الف-۱) تعاریف اساسی

هر ماتریس، از یک سری عناصر تشکیل شده اند که در کنار یکدیگر و داخل دو کروشه قرار می‌گیرند. این عناصر به‌صورت ردیف‌های افقی در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. هر ردیف افقی از این اعداد را یک سطر[1] می‌گویند و اعداد قرار گرفته در هر ردیف عمودی را ستون[2] می‌گویند. این اعداد ماتریسی می‌توانند به‌صورت اعداد حقیقی، مختلط و یا توابع مختلف باشند. شکل کلی یک ماتریس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & . & . & . & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & . & . & . & . & a_{۲n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m۱} & a_{m۲} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱)}$$

[1]- Row
[2]- Column

که ماتریس مذکور، دارای m سطر و n ستون می‌ماند. هر عنصر از این ماتریس **A** را به نمایندگی به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم که اندیس i بیانگر شماره سطر و j بیانگر ستون عنصر a_{ij} می‌باشند. به‌عنوان مثال، هر عنصر a_{ij} می‌تواند به‌صورت‌های نمونه ۱۷ ، ۳+j۲۲ ، $x^۳/_{x+۱}$ ، $\tan\sqrt{s}$ و .... باشند.

در صورتی که ماتریس **A** دارای یک سطر باشد به آن، ماتریس سطری[1] می‌گویند که اصطلاحاً بردار سطری هم گفته می‌شود. اگر ماتریس **A** دارای یک ستون باشند به آن، ماتریس ستونی[2] یا بردار ستونی می‌گویند. هر عنصر یک بردار سطری به‌صورت $a_{۱j}$ نامیده می‌شود و هر عضو یک بردار ستونی به‌شکل $a_{i۱}$ می‌گویند. به‌عنوان نمونه از چند ماتریس زیر می‌توان نام برد:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۶ & ۷ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} ۱+j۲ \\ ۳j \\ ۴ \end{bmatrix} \ , \ \mathrm{C}=\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \end{bmatrix} \ , \ D=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \quad \text{(الف-۲)}$$

که **A** ماتریس ۳×۲ (عدد سه به‌معنای تعداد سطر و عدد دو به‌معنای تعداد ستون است)، **B** یک بردار ستونی ۳×۱ ، **C** یک بردار سطری ۱×۲ ، و **D** یک ماتریس ۲×۲ است.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آنها با هم برابرند به‌نام ماتریس‌های مربعی[3] معروف هستند.

ماتریس متقارن: یک ماتریس مربعی را ماتریس متقارن[4] گویند اگر وفقط اگر $a_{ij}=a_{ji}$ باشد. نمونه از این ماتریس را می‌توان در زیر مشاهده نمود:

$$E=\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳)}$$

ماتریس قطری: یک ماتریس مربعی که اعضاء قطری آن غیر صفر و اعضاء غیرقطری برابر صفر باشند به‌نام ماتریس قطری[5] می‌گویند. اعضاء قطری، اعضایی هستند که شماره سطر و ستون آنها با هم برابرند. به‌عنوان مثال می‌توان به ماتریس قطری زیر اشاره نمود:

---

[1]- Row Matrix
[2]- Column Matrix
[3]- Square Matrix
[4]- Symmetric Matrix
[5]- Diagonal Matrix

$$F=\begin{bmatrix} ۱ & o & o & o \\ o & ۳ & o & o \\ o & o & ۲ & o \\ o & o & o & ۴ \end{bmatrix} \qquad \text{(الف–۴)}$$

ماتریس واحد: یک ماتریس قطری که اعضای قطری آن، برابر واحد باشند به‌نام ماتریس واحد معروف می‌باشد. مثلاً،

$$I=\begin{bmatrix} ۱ & o & o \\ o & ۱ & o \\ o & o & ۱ \end{bmatrix} \qquad \text{(الف–۵)}$$

معمولاً ماتریس واحد را با **I** نشان می‌دهند که ماتریس فوق، یک ماتریس واحد ۳×۳ می‌باشد.

الف–۲) خواص اساسی جبر ماتریس‌ها

دراین بخش، خواص اساسی ماتریس‌های موردنظر در این کتاب بیان می‌گردد.

تساوی دو ماتریس: از شروط تساوی دو ماتریس **A** و **B** ، آن است که اولاً دو ماتریس **A** و **B** دارای تعداد سطرهای مساوی و تعداد ستون‌های مساوی باشند، ثانیاً اعضاء متناظر در هر ماتریس **A** و **B** با هم برابر باشند. یعنی اگر a_{ij} عضو نماینده ماتریس **A** و b_{ij} عضو نماینده ماتریس **B** باشد آنگاه برای تساوی دو ماتریس **A** و **B** ، باید خاصیت $a_{ij}=b_{ij}$ برقرار باشند.

جمع و تفریق دو ماتریس: مشابه تساوی دو ماتریس، جمع و یا تفریق ماتریس‌ها نیز باید با ابعاد سطر و ستون یکسان باشند. آنگاه در جمع دو ماتریس، اعضاء متناظر با هم جمع می‌شوند و در تفریق دوماتریس، اعضاء متناظر از هم کم می‌شوند. به‌عنوان مثال، اگر **C=A-B** باشد آنگاه هر عضو c_{ij} به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \qquad \text{(الف–۶)}$$

ضرب یک ماتریس در یک عدد: در صورتی که ماتریس **A** در یک عدد یا تابع k ضرب شود آنگاه این عدد k در تمام اعضاء ماتریس **A** ضرب می‌شود. به‌عبارت دیگر، هر عضو

جدید از ماتریس kA برابر مقدار $k.a_{ij}$ خواهد بود. به‌عنوان مثال، اگر مقدار $\frac{s}{s^۲+۱}$ را بخواهیم در ماتریس ۲×۲ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{s}{s^۲+۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{s}{s^۲+۱} & \frac{۲s}{s^۲+۱} \\ \frac{۳s}{s^۲+۱} & \frac{۴s}{s^۲+۱} \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس A و B: برای اینکه بتوانیم ماتریس **A** را در **B** ضرب کنیم (یعنی بخواهیم **C=AB** را محاسبه کنیم) شرط قطعی در ضرب **AB** این است که تعداد ستون‌های ماتریس **A** باید برابر تعداد سطرهای ماتریس **B** باشد. یعنی اگر ماتریس **A** ، $m\times n$ باشد، آنگاه ماتریس **B** باید دارای تعداد n سطر باشد و مثلاً به‌صورت $n\times p$ باشد. با ضرب این دو ماتریس، بعد ماتریس **C** برابر $m\times p$ خواهد بود. حال هر عضو c_{ij} از ماتریس **C** از حاصل ضرب سطر i ام از ماتریس **A** در ستون j ام ماتریس **B** به‌دست می‌آید. یعنی اگر،

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & . & . & . & a_{۱n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m۱} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & . & . & . & b_{۱p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n۱} & . & . & . & b_{np} \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & . & . & . & c_{۱p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{m۱} & . & . & . & c_{mp} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف–۷)}$$

آنگاه عضو ij از ماتریس **C** (یعنی c_{ij}) از ضرب برداری سطر i ام از ماتریس **A** در ستون j ام از ماتریس **B** به‌شکل زیر حاصل می‌شود:

$$c_{ij}=\begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & . & . & a_{in} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{۱j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\ldots+a_{in}b_{nj} \qquad \text{(الف–۸)}$$

به عنوان مثال، حاصل ضرب دو ماتریس **A** و **B** با مشخصات زیر برابر است با:

$$C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & ۲ \\ 3 & ۴ \\ 5 & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+۳b+۵c & ۲a+۴b+۶c \\ d+۳e+۵f & ۲d+۴e+۶f \end{bmatrix}$$

همچنین اگر **A** یک بردار ستونی و **B** یک بردار سطری باشد و به‌صورت زیر مشخص شده باشند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

آنگاه **C=AB** برابر است با:

$$C=AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

در این مثال، چون ماتریس **A** با ابعاد ۱×۳ (بردار ستونی) و ماتریس **B** با ابعاد ۳×۱ (بردار سطری) است لذا بعد ماتریس **C=AB** با ابعاد ۳×۳ خواهد بود. از طرف دیگر، اگر حاصل ضرب **BA** را بدست آوریم آنگاه،

$$D=BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۴+۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ \end{bmatrix}$$

یعنی یک ماتریس با بعد ۱×۱ و یا عبارت ساده تر، یک عدد می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم که خاصیت جابجایی در ضرب ماتریس‌ها وجود ندارد؛ یعنی **AB≠BA** خواهد بود.

دترمینان یک ماتریس: دترمینان یک ماتریس مربعی، یک مقدار عددی خواهد بود که با محصور کردن دو خط عمودی در دو طرف ماتریس مشخص می‌شود. مثلاً دترمینان ماتریس **A** را با $|A|$ نشان می‌دهیم. برای تعیین دترمینان هر ماتریس، ابتدا آن ماتریس را بر حسب مینورهای آن بسط می‌دهیم. بسط دادن مذکور به این‌صورت است که ابتدا یک سطر j ام یا یک ستون k ام را طور دلخواه انتخاب می‌کنیم. سپس هر عضو از سطر یا ستون انتخابی را در مینور آن عضو و در ضریب $(-۱)^{j+k}$ ضرب می‌کنیم. سپس این حاصل ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. مینور عنصری که روی سطر j ام و ستون k ام قرارداد، دترمینانی است که از حذف سطر j و ستون k حاصل می‌شود. این موضوع را با مثال‌های ساده‌ای بیان می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم دترمینان ماتریس **A** به‌صورت $A=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنیم. بدین منظور، یک سطر یا ستون از ماتریس **A** را انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر اول را انتخاب می‌کنیم. عضو اول از این سطر، r_1 است که باید در ضریب $(-1)^{1+1}$و در مینور آن ضرب شود. برای تعیین مینور عضو r_1 ، سطر و ستون متناظر آن را حذف می‌کنیم که عضو باقیمانده r_4 می‌شود. پس جمله اول از دترمینان، برابر $(-1)^{1+1}r_1r_4$ می‌باشد. عضو دوم از سطر انتخابی، r_2 می‌باشد که باید در ضریب $(-1)^{1+2}$ و در مینور آن ضرب شود. مینور عضو r_2 برابر r_3 می‌باشد؛ یعنی $(-1)^{1+1}r_2r_3$ می‌باشد. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$|A|=(-1)^{1+1}\left(r_1r_4\right)+(-1)^{1+2}\left(r_2r_3\right)=r_1r_4-r_2r_3 \qquad \text{(الف-۹)}$$

در صورتی که سطر یا ستون انتخابی را ستون اول انتخابی کنیم باز به همین جواب دترمینان A می‌رسیم. بدین منظور، برای تعیین دترمینان **A** بر حسب ستون اول می‌توان نوشت:

$$|A|=(-1)^{1+1}\left(r_1r_4\right)+(-1)^{2+1}\left(r_3r_2\right)=r_1r_4-r_2r_3 \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

که مینور عضو r_3 برابر r_2 می‌باشد.

حال همین روال را می‌توان برای ماتریس‌های با ابعاد بزرگ نیز نشان داد. مثلاً فرض کنید که ماتریس **B** به‌صورت زیر می‌باشد:

$$B=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

حال باید مشابه حالت قبل، یک سطر یا ستون را به دلخواه انتخاب کنیم. معمولاً مناسب است سطر یا ستونی انتخاب شود که دارای اعضاء صفر بیشتری باشند. در اینجا سطر اول را به‌عنوان انتخاب موردنظر، در نظر می‌گیریم. آنگاه $|\mathbf{B}|$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|B|=(-1)^{1+1}(r_1)\begin{vmatrix} r_5 & r_6 \\ r_8 & r_9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(r_2)\begin{vmatrix} r_4 & r_6 \\ r_7 & r_8 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(r_3)\begin{vmatrix} r_4 & r_5 \\ r_7 & r_8 \end{vmatrix} \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

از رابطه اخیر در می‌یابیم که برای محاسبه دترمینان **B** با ابعاد ۳×۳ نیاز به تعیین دترمینان سه مینور اعضاء r_1 ، r_2 ، و r_3 می‌باشد. در نهایت با استفاده از رابطه (الف-۹) خواهیم داشت:

$$|B|=(-1)^{1+1}(r_1)\left(r_5r_9-r_6r_8\right)+(-1)^{1+2}(r_2)\left(r_4r_8-r_6r_7\right)+(-1)^{1+3}(r_3)\left(r_4r_8-r_5r_7\right)$$

$$|B|=r_1\left(r_5r_9-r_6r_8\right)-r_2\left(r_4r_8-r_6r_7\right)+r_3\left(r_4r_8-r_5r_7\right) \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

به عنوان مثال، دیگر اگر ماتریس **R** به‌صورت زیر می‌باشد:

$$R=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & -۱ \\ -۲ & ۵ & -۳ \\ -۱ & -۳ & ۸ \end{bmatrix}$$

آنگاه $|\mathbf{R}|$ ، با انتخاب سطر اول برابر است با:

$$|R|=(-۱)^{۱+۱}(۳)\begin{vmatrix} ۵ & -۳ \\ -۳ & ۸ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}(-۲)\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ -۱ & ۸ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۳}(-۱)\begin{vmatrix} -۲ & ۵ \\ -۱ & -۳ \end{vmatrix}$$

$$=۳(۴۰-۹)-(-۲)(-۱۶-۳)+(-۱)(+۶+۵)=۳\times۳۱+۲(۱۹)+(-۱)(۱۱)=۴۴$$

الف-۳) نمایش ماتریسی معادلات جبری

یکی از کاربردهای اساسی عملیات ماتریسی، استفاده در حل معادلات جبری می‌باشد. به‌عنوان مثال، فرض کنید که یک دستگاه دو معادله دو مجهولی به‌شکل زیر موردنظر باشد:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲=y_۱ \\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲=y_۲ \end{cases} \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

اعداد و متغیرهای ارائه‌شده در معادله (الف-۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر دسته بندی کرد:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \quad \mathrm{X}=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \quad \mathrm{Y}=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

حال نمایش دسته معادلات (الف-۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{Y} \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

به عبارت دیگر، ضرب ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ در بردار $\mathbf{X}$ به این‌صورت انجام می‌شود که هر سطر ماتریس $\mathbf{A}$ در ستون بردار $\mathbf{X}$ ضرب می‌شود. یعنی،

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲ \\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

در حالت کلی، یک دسته n معادله، n مجهول را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathrm{Y}=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \;,\; \mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & . & . & . & a_{۱n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n۱} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \;,\; \mathrm{X}=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

که هر معادله i ام از n دسته معادله را می‌توان به‌شکل کلی زیر نوشت:

$$y_i = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} x_k \qquad i = ۱,۲,\ldots,n \qquad \text{(الف–۱۹)}$$

به عبارت دیگر، رابطه اخیر نشان دهنده آن است که سطر i ام در بردار ستونی متغیرهای x (یعنی **X**) ضرب می‌شود. حال می‌خواهیم با فرض معلوم بودن اعداد ماتریس **A** به‌عنوان ماتریس ضرایب و اعداد بردار **Y** به‌عنوان بردار سمت راست تساوی، بردار مجهولات **X** را بیابیم. ساده ترین راه، استفاده از روش کرامر در تعیین مقدار مجهولات است. در روش کرامر، ابتدا باید دترمینان ماتریس **A** را تعیین کنیم. حال اگر بخواهیم عضو مجهول $x_۱$ را تعیین کنیم ابتدا یک ماتریس جدیدی ایجاد می‌کنیم. این ماتریس جدید از جایگزینی بردار ستونی **Y** در ستون اول از ماتریس **A** است. سپس دترمینان این ماتریس جدید را به‌دست می‌آوریم تا در نهایت، با تقسیم دترمینان مذکور بر دترمینان ماتریس **A** ، مقدار $x_۱$ حاصل شود. برای محاسبه $x_۲$ تنها تفاوتی که با محاسبه $x_۱$ دارد آن است که در تعیین ماتریس جدید، بردار Y در ستون دوم از ماتریس **A** جایگزین شده و سپس دترمینان ماتریس جدید بر دترمینان ماتریس **A** تقسیم می‌شود. در نهایت، برای محاسبه x_n ، ابتدا بردار **Y** در ستون n ام از ماتریس **A** جایگزین شده و با تعیین دترمینان ماتریس جدید و تقسیم آن بر دترمینان **A** ، مقدار x_n محاسبه می‌شود. این روند را می‌توان در مثال زیر مشاهده نمود.

فرض کنید بخواهیم دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} ۷v_۱ - ۳v_۲ - ۴v_۳ = -۱۱ \\ -۳v_۱ + ۶v_۲ - ۲v_۳ = ۳ \\ -۴v_۱ - ۲v_۲ + ۱۱v_۳ = ۵ \end{cases}$$

ابتدا این سه معادله را به‌شکل ماتریسی و مطابق شکل ارائه‌شده در معادله (الف–۸) می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۴ \\ -۳ & ۶ & -۲ \\ -۴ & -۲ & ۱۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۱ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

که در نتیجه متغیرهای بردار مجهول، $v_۱$ ، $v_۲$ ، و $v_۳$ می‌باشد. یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۴ \\ -۳ & ۶ & -۲ \\ -۴ & -۲ & ۱۱ \end{bmatrix} \;,\quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} -۱۱ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \;,\quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} -۱۱ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

برای تعیین مجهولات $v_۱$ ، $v_۲$ ، و $v_۳$ ابتدا باید دترمینان ماتریس **A** را بدست آوریم که،

$$|A|=\begin{vmatrix} ۷ & -۳ & -۴ \\ -۳ & ۶ & -۲ \\ -۴ & -۲ & ۱۱ \end{vmatrix}=$$

$$=(-۱)^{۱+۱}(۷)\begin{vmatrix} ۶ & -۲ \\ -۲ & ۱۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}(-۳)\begin{vmatrix} -۳ & -۲ \\ -۴ & ۱۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۳}(-۴)\begin{vmatrix} -۳ & ۶ \\ -۴ & -۲ \end{vmatrix}=۱۹۱$$

حال برای تعیین مجهول $v_۱$ ، ماتریس جدیدی با جایگزینی بردار **Y** در ستون اول ماتریس **A** ایجاد کرده و دترمینان آن را ایجاد می‌کنیم. یعنی،

$$\begin{vmatrix} -۱۱ & -۳ & -۴ \\ ۳ & ۶ & -۲ \\ ۵ & -۲ & ۱۱ \end{vmatrix}=$$

$$=(-۱)^{۱+۱}(-۱۱)\begin{vmatrix} ۶ & -۲ \\ -۲ & ۱۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}(-۳)\begin{vmatrix} -۳ & -۲ \\ ۵ & ۱۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۳}(-۴)\begin{vmatrix} ۳ & ۶ \\ ۵ & -۲ \end{vmatrix}=۱۹۱$$

در نتیجه مقدار $v_۱=\frac{۱۹۱}{۱۹۱}=۱$ می‌باشد. همچنین برای مقدار $v_۲$ و $v_۳$ خواهیم داشت:

$$v_۲=\frac{\begin{vmatrix} ۷ & -۱۱ & -۴ \\ -۳ & ۳ & -۲ \\ -۴ & ۵ & ۱۱ \end{vmatrix}}{۱۹۱}=\frac{۵۸۱-۶۳-۱۳۶}{۱۹۱}=۲$$

$$v_۳=\frac{\begin{vmatrix} ۷ & -۳ & -۱۱ \\ -۳ & ۶ & ۳ \\ -۴ & -۲ & ۵ \end{vmatrix}}{۱۹۱}=\frac{۱۰۹۲-۲۹۱-۲۲۸}{۱۹۱}=۳$$

مزیت این روش آن است که در صورتی که نیاز به محاسبه یک متغیر از بردار مجهولات **X** باشد نیاز به یک سری محاسبه وجود دارد.

ضمیمه (ب)

اعداد مختلط و خواص آنان

در مطالعات مدارهای با حالت دائمی سینوسی در فصل هفتم، نیاز به استفاده از اعداد و متغیرهای مختلط داشتیم. لذا در این ضمیمه به دنبال آن هستیم تا تعاریف مرتبط با اعداد مختلط و خواص جبر اعداد مختلط را که در مطالعه این کتاب به آنها نیاز داریم، بیان نماییم.

ب-۱) تعاریف مرتبط با اعداد مختلط

یک عدد مختلط $\vec{Z}$ از یک زوج مرتب به‌صورت (x , y) تشکیل شده است که مقدار x را قسمت حقیقی[1] و مقدار y را قسمت موهومی[2] عدد مختلط $\vec{Z}$ می‌نامیم. شکل متداول نمایش یک عدد مختلط $\vec{Z}$ به‌صورت نمایش دکارتی است که،

$$\vec{Z} = x + jy \qquad (ب-۱)$$

$$x = \mathrm{Re}(\vec{Z}) \qquad (ب-۲)$$

$$y = \mathrm{Im}(\vec{Z}) \qquad (ب-۳)$$

که در رابطه (ب-۱)، متغیر j بردار یکه در محور y است و $j^۲ = -۱$ یا $j = \sqrt{-۱}$ می‌باشند. همچنین $\mathrm{Re}(\vec{Z})$ به‌معنای قسمت حقیقی عدد مختلط $\vec{Z}$ و ، $\mathrm{Im}(\vec{Z})$ قسمت موهومی عدد مختلط $\vec{Z}$ است. این نمایش دکارتی در شکل (ب-۱) نشان داده شده است.

---

[1]- Real Part

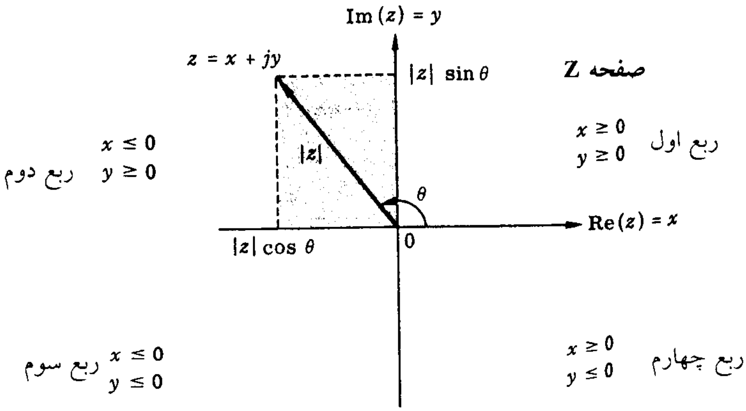
[2]- Imaginary Part

نمایش دیگر عدد مختلط به‌شکل نمایش قطبی آن می‌باشد. به‌عبارت دیگر، در این شکل نمایش، یک عدد مختلط (که به‌صورت یک بردار در صفحه x-y می‌باشد) با اندازه آن بردار $|Z|$ و زاویه آن نسبت به محور x یعنی θ مشخص می‌گردد که،

$$\vec{Z}=|Z|e^{j\theta} \qquad \text{(ب-۴)}$$

در این رابطه، $|Z|$ طول (اندازه) بردار عدد مختلط و θ زاویه آن بردار با محور x است که این شکل نمایش نیز در شکل (ب-۱) آورده شده است. شکل دیگر نمایش قطبی به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\vec{Z}=|Z|\angle\theta \qquad \text{(ب-۵)}$$



شکل (ب-۱): نمایش اعداد مختلط به‌صورت نمایش دکارتی و قطبی

حال می‌خواهیم ارتباط بین نمایش دکارتی و قطبی اعداد مختلط را به‌دست آوریم.

ب-۲) تبدیل نمایش اعداد مختلط به یکدیگر

فرض کنید که عدد مختلطی به‌صورت نمایش دکارتی آن و بر اساس معادله (ب-۱) داده شده باشد. با توجه به‌شکل (ب-۱) اندازه این عدد مختلط را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$|Z|=\sqrt{x^{2}+y^{2}} \qquad \text{(ب-۶)}$$

و برای تعیین زاویه این بردار با محور x خواهیم داشت:

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{(ب-۷)}$$

در نتیجه،

$$\vec{Z}=\sqrt{x^{2}+y^{2}}\angle\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (ب-۸)$$

حال اگر یک عدد مختلط به‌شکل نمایش قطبی آن و به‌صورت ارائه‌شده در را بطه (ب-۴) یا (ب-۵) باشد آنگاه قسمت حقیقی و موهومی این عدد مختلط برابر است با:

$$x=|Z|\cos\theta \qquad (ب-۹)$$

$$y=|Z|\sin\theta \qquad (ب-۱۰)$$

در نتیجه،

$$\vec{Z}=|Z|\cos\theta+j|Z|\sin\theta \qquad (ب-۱۱)$$

لازم به‌ذکر است که با استفاده از رابطه اولر که $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ می‌باشد، می‌توان از رابطه (ب-۴) نیز به رابطه (ب-۱۱) رسید. البته لازم به‌ذکر است که رابطه $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ زاویه بردار (عدد مختلط) را متناظر با ربع اول و چهارم می‌دهد. لذا باید قسمت‌های حقیقی و موهومی عدد مختلط توجه داشت تا تأثیر مکان بردار را در زاویه θ مشخص نمود. به‌عبارت دیگر، اگر بردار موردنظر در ربع دوم یا سوم باشد، باید به زاویه محاسبه شده، مقدار ۱۸۰ درجه اضافه شود.

ب-۳) خواص اعداد مختلط

در ابتدا مزدوج یک عدد مختلط را بیان می‌کنیم. مفهوم مزدوج یک عدد مختلط، آن است که اگر فرم نمایش آن به شکل دکارتی باشد، آنگاه باید قسمت موهومی آن در یک عدد منفی ضرب شود. یعنی اگر $\vec{Z}=x+jy$ باشد آنگاه $\vec{Z}^{*}=x-jy$ خواهد بود که $\vec{Z}^{*}$ مزدوج عدد مختلط $\vec{Z}$ است. همچنین اگر فرم نمایش عدد مختلط به شکل قطبی و به‌صورت $\vec{Z}=|Z|\angle\theta$ باشد آنگاه مزدوج عدد مختلط به این معنی است که زاویه آن در یک عدد منفی ضرب شود؛ یعنی $\vec{Z}^{*}=|Z|\angle-\theta$.

ضرب یک عدد حقیقی در عدد مختلط: در صورتی که یک عدد حقیقی k در یک عدد مختلط $\vec{Z}$ ضرب شود، در شکل نمایش دکارتی و قطبی آن، حاصل برابر است با:

$$k(\vec{Z})=K(x+jy)=kx+jky \qquad (ب-۱۲)$$

$$k(\vec{Z})=K(|Z|\angle\theta)=k|Z|\angle\theta \qquad (ب-۱۳)$$

همچنین اگر ضریب $\frac{1}{k}$ در عدد مختلط ضرب می‌شود، در شکل دکارتی آن، هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی آن بر عدد k تقسیم می‌شود. بعلاوه درشکل قطبی $\vec{Z}$ ، اندازه آن بر عدد k تقسیم می‌گردد.

جمع و تفریق دوعدد مختلط: فرض کنید دو عدد مختلط $\vec{Z}_1 = x_1 + jy_1$ و $\vec{Z}_2 = x_2 + jy_2$ مد نظر است. حال برای جمع یا تفریق کردن دو عدد مختلط $\vec{Z}_1$ و $\vec{Z}_2$ ، باید قسمت‌های حقیقی با یکدیگر و قسمت موهومی آنان با یکدیگر جمع یا تفریق شوند. یعنی،

$$\vec{Z}_1 \pm \vec{Z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \qquad \text{(ب-۱۴)}$$

حال در صورتی که اعداد مختلط به‌صورت نمایش قطبی باشد، باید آنان را ابتدا به‌شکل نمایش دکارتی درآورد و سپس، عملیات جمع یا تفریق را بر روی آنان انجام داد.

ضرب دو عدد مختلط: برای ضرب دو عدد مختلط با نمایش دکارتی، می‌توان مثل ضرب معمولی عمل کرد؛ با این تفاوت که عملگر $j \times j = j^2 = -1$ و $j^3 = -j$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 \times \vec{Z}_2 &= (x_1 + jy_1)\cdot(x_2 + jy_2) = \\ &= (x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \qquad \text{(ب-۱۵)}$$

حال اگر دو عدد مختلط با نمایش قطبی باشند (یعنی $\vec{Z}_1 = |Z_1|\angle\theta_1$ و $\vec{Z}_2 = |Z_2|\angle\theta_2$ باشد) آنگاه حاصل ضرب این دو عدد مختلط دارای اندازه $|Z_1||Z_2|$ و زاویه $\theta_1 + \theta_2$ خواهد بود. یعنی،

$$\vec{Z}_1\vec{Z}_2 = \left(|Z_1|\angle\theta_1\right)\left(|Z_2|\angle\theta_2\right) = |Z_1||Z_2|\angle\theta_1 + \theta_2 \qquad \text{(ب-۱۶)}$$

تقسیم دو عدد مختلط: در صورتی که دو عدد مختلط موردنظر با نمایش دکارتی باشند، ابتدا باید مخرج را در مزدوج آن ضرب کنیم تا مخرج به‌صورت یک عدد حقیقی در آید. به این منظور داریم:

$$\frac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \times \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad \text{(ب-۱۷)}$$

همچنین اگر دو عدد مختلط موردنظر با نمایش قطبی باشند، آنگاه کافی است که اندازه دو عدد مختلط بر هم تقسیم شده و زاویه دو عدد مختلط از هم کم شوند. یعنی،

$$\frac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_2} = \frac{\left(|Z_1|\angle\theta_1\right)}{\left(|Z_2|\angle\theta_2\right)} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}\angle\theta_1 - \theta_2 \qquad \text{(ب-۱۸)}$$

به عنوان مثال، اگر دو عدد مختلط به‌صورت $1 - j1$ و $2 + j2$ باشند آنگاه،

$$\vec{Z}_۱\vec{Z}_۲=(۱-j۱)(۲+j۲)=۴+jo$$
$$\vec{Z}_۱\vec{Z}_۲=(۱-j۱)(۲+j۲)=(\sqrt{۲}e^{-j۴۵})(۲\sqrt{۲}e^{j۴۵})=۴e^{-jo}=۴$$
$$\frac{\vec{Z}_۱}{\vec{Z}_۲}=\frac{(۱-j۱)}{(۲+j۲)}\times\frac{۲-j۲}{۲-j۲}=\frac{(۲-۲)+j(-۲-۲)}{۴+۴}=-\frac{۱}{۲}j$$
$$\frac{\vec{Z}_۱}{\vec{Z}_۲}=\frac{(۱-j۱)}{(۲+j۲)}=\frac{\sqrt{۲}e^{-j۴۵}}{۲\sqrt{۲}e^{j۴۵}}=\frac{۱}{۲}e^{-j۹۰}=-\frac{۱}{۲}j$$

توان و ریشه برای اعداد مختلط: فرض کنید یک عدد مختلط $\vec{Z}=x+jy$ به توان عدد صحیح n برسد. برای به توان رساندن این عدد مختلط، مناسب است که عدد مذکور را به‌شکل قطبی نمایش دهیم. پس از قطبی شدن عدد مختلط، در صورت به توان n رسیدن، اندازه عدد مختلط به توان n و زاویه آن نیز n برابر می‌شود. لذا،

$$\vec{Z}^n=(x+jy)^n=(|Z|\angle\theta)^n=|Z|^n\angle n\theta \qquad \text{(ب-۱۹)}$$

که $x+jy=|Z|\angle\theta$ می‌باشد.

به همین طریق اگر از یک عدد مختلط $\vec{Z}$ ، ریشه m ام آن گرفته شود آنگاه مشابه رابطه (ب-۱۹) خواهیم داشت:

$$\sqrt[m]{\vec{Z}}=(\vec{Z})^{\frac{۱}{m}}=(|Z|\angle\theta)^{\frac{۱}{m}}=|Z|^{\frac{۱}{m}}\angle\frac{\theta}{m}+\frac{۲\pi k}{m}=\sqrt[m]{|Z|}\angle\frac{\theta}{m}+\frac{۲\pi k}{m} \qquad \text{(ب-۲۰)}$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم $\sqrt[۳]{۱+jo}$ را بیابیم آنگاه می‌توان نوشت:

$$\sqrt[۳]{(۱+jo)}=(۱+jo)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۱}\angle\frac{o}{۳}+\frac{۲\pi k}{۳}$$

حال برای $k=o,۱,۲$ خواهیم داشت:

$$\sqrt[۳]{(۱+jo)}=\begin{cases}۱\angle o=۱+jo\\ ۱\angle\frac{۲\pi}{۳}=-۰/۵+j۰/۸۶۶\\ ۱\angle\frac{۴\pi}{۳}=-۰/۵-j۰/۸۶۶\end{cases}$$

کتابنامه

1- W. H. Hayt and J. E. Kemmerly, *Engineering Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1986.

2- S. Madhu, *Linear Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1988.

3- S. Karni, *Analysis of Electrical Networks*, Jhon Wiley & Sons, 1986.

4- R. E. Thomas and A. J. Rosa, *The Analysis and Design of Linear Circuits*, Jhon Wiley & Sons, 2004.

5- L. J. Tung and B. W. Kwan, *Circuit Analysis*, World Scientific Publishing Company, 2001.

6- A. M. Davis, *Linear Circuit Analysis*, PWS Publishing Company, 1998.

7- S. A. Boctor, *Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1992.

8- D. E. Johnson, J. L. Hilburn and J. R. Johnson, *Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1992.

9- L. P. Huelsman, *Basic Circuit Theory with Digital Computation*, Prentice-Hall, 1973.

10- A. E. Fitzgerald, D. E. Higginbothan and A. Grabel, *Basic Electrical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1982.

11- P. E. Bennett, *Advanced Circuit Analysis*, Harcourt Brace Jovanovich, 1992.

12- R. L. Boylestad, *Introductory Circuit Analysis*, Macillan Company, 1994.

13- S. Gupta, J. W. Bayless and B. Peikari, *Circuit Analysis with Computer Applications to Problem Solving*, Wiley Eastern Limited, 1972.

14- C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Basic Circuit Theory*, McGraw- Hill Book Company, 1969.

15- J, Staudhammer, *Circuit Analysis by Digital Computer*, Prentice-Hall, 1975.

16- J. D. Irwin, *Basic Engineering Circuit Analysis*, Collier Macmillan, 1984.

17- J. L. Stewart, *Circuit Theory and Design*, Jhon Wiley & Sons, 1956.

18- G. Williams, *An Introduction to Electrical Circuit Theory*, Collier Macmillan, 1973.

19- M. R. Taber and E. M. Silgalis, *Electric Circuit Analysis*, Hough Mifflin Company, 1980.

20- R. E. Armington and C. Volz, *An Introduction to Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1961.

21- D. E. Johnson, J. L. Hilburn and J. R. Johnson, *Basic Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1984.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

(ا)

اتصال پشت سر هم	Cascade Connection
استاتور	Stator
الاستانس	Elastance
اندوکتانس خودی	Self Inductance
اندوکتانس سلفی	Inductance
اندوکتانس متقابل	Mutual Inductance
اندوکتانس معکوس	Reciprocal Inductance
اهم	Ohm

(ب)

بار الکتریکی	Electric Charge
بسط کسرهای جزیی	Partial Fraction Expansion
بی‌اتلاف	Lossless

(پ)

پارامترهای امپدانس مدار باز	Open Circuit Impedance Parameters
پارامترهای ادمیتانسی اتصال کوتاه	Short Circuit Admitance Parameters
پارامترهای شبکه	Network Parameters
پاسخ حالت صفر	Zero State Response
پاسخ کامل	Complete Response
پاسخ ورودی صفر	Zero Input Response
پس‌فاز	Lag
پیش‌فاز	Lead

(ت)

تابع پالس	Pulse Function
تابع پله	Step Function
تابع شبکه	Network Function
تابع شیب	Ramp Function
تابع ضربه	Impulse Function
تبدیل لاپلاس	Laplace Transformation
توپولوژی مدار	Network Topology

(ج)

جریان الکتریکی	Electeric Current
جهت قراردادی متناظر	Associated Refference Direction

(چ)

چندجمله‌ای مشخصه	Characteristic Polynominal

(ح)

حلقه	Loop
حوزه زمان	Time Domain
حوزه فرکانس	Frequency Domain

(خ)

خازن	Capacitor
خطوط شار مغناطیسی	Magnetic Flux

(د)

دامنه	Amplitude

(ر)

رابطه اولر	Euler Equation
راکتانس القایی	Reactance
رسانایی	Conductance
رلوکتانس مغناطیسی	Magntic Reluctance

روش جمع‌آثار	Superposition Method
(ز)	
زاویه فاز	Phase Angle
(س)	
ستون	Column
سطر	Row
سلف	Inductor
سلف‌های تزویج شده	Coupled Inductors
(ش)	
شاخه	Branch
شبکه بی تحریک	Unforced Network
شبکه غیرمسطح	Non-PlanarGraph
شبکه مسطح	Planar Graph
شرط پیوستگی	Continutiy Condition
(ص)	
صفحه فرکانس مختلط	Complex Frequency Plane
(ض)	
ضریب تزویج	Coefficient of Coupling
ضریب قدرت	Power Factor
(ظ)	
ظرفیت خازنی	Capacitance
(ع)	
عناصر تزویج شونده	Coupling Elements
عنصر اکیتو	Active Element
عنصر پسیو	Passive Element
عنصر فشرده	Lumped Element
عنصر گسترده	Distributed Element

(ف)

فاراد	Farad
فرم قطبی	Polar Form

(ق)

قاعده اولر	Euler's Identity
قانون جریان کیرشهف	Kirchhoff's Current Law
قانون ولتاژ کیرشهف	Kirchhoff's Voltage Law
قسمت حقیقی	Real Part
قسمت موهومی	Imaginary Part
قضیه تونن	Thevenin Theorem
قضیه نورتن	Norton Theorem
قوانین کیرشهف	Kirchoff's Laws

(ک)

کولن	Coulomb

(گ)

گره	Node

(م)

ماتریس پارامترهای ادمیتانس متقارن	Symmetric y-Parameter Matrix
ماتریس پارامترهای امپدانس متقارن	Symetric z-papameter Matrix
ماتریس ستونی	Column Matrix
ماتریس سطری	Row Matrix
ماتریس قطری	Diagonal Matrix
ماتریس متقارن	Symmetric Matrix
ماتریس مربعی	Square Matrix
ماتریس هایبرید	Hybrid Matrix
متغیر خطی	Line Variable
متغیر فازی	Phase Variable
مدار باز	Open Circuit
مدار اتصال کوتاه	Short Circuit

مدارهای مرتبه اول	First Order Circits
مدارهای مرتبه دوم	Second Order Circits
معادله مشخصه	Characteristic Equation
مقاومت الکتریکی	Resistance
منابع الکتریکی مستقل	Independent Sources
منابع الکتریکی وابسته	Dependent Sources
مناسب	Proper
مهو	Mho
میرایی بحرانی	Critically Damped
میرایی شدید	Over Damped
میرایی ضعیف	Under Damped
(ن)	
نیروی محرکه مغناطیسی	Magnetomotive Force
(و)	
وبر- دور	Weber-turn
(هـ)	
هانری	Henry