فصل نهم

توابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی

۹-۱- مقدمه

یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس در یافتن تابع شبکه و فرکانسهای طبیعی یک شبکه می‌باشد. بدین منظور، در این فصل ابتدا تابع شبکه و خصوصیات آن مورد بررسی قرار می‌گیرد که با استفاده از تبدیل لاپلاس، روش‌های مختلف تعیین تابع شبکه را بیان می‌کنیم و خواص آن را ارائه می‌دهیم. همچنین نحوه تعیین قطب‌ها و صفرهای تابع شبکه را مشخص می‌کنیم و ارتباط آنها را با یکدیگر بیان می‌کنیم. در قسمت دوم این فصل، مفهوم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه و فرکانس‌های طبیعی شبکه الکتریکی را مشخص نموده و ارتباط آن را با توابع شبکه بیان می‌کنیم. البته فرکانس‌های طبیعی در شرایط ورودی صفر تعریف می‌گردند؛ به‌عبارت دیگر، منابع نابسته هیچ تأثیری در فرکانس‌های طبیعی ندارد و تنها ساختار و توپولوژی شبکه در تعیین مقدار فرکانس‌های طبیعی، مؤثر می‌باشد. این مفاهیم، برای درک رفتار و عملکرد شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان اهمیت فراوانی دارد.

۹-۲- تابع شبکه، امپدانس و ادمیتانس شبکه

عملکرد سیستم‌ها ایجاب می‌کند که پاسخ مدارهای الکتریکی را به ورودی‌های مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. بدین منظور استفاده از تبدیل لاپلاس و انتقال سیستم از حوزه زمان به حوزه فرکانس، برای تعیین مشخصات پاسخ سیستم‌ها به هر تحریک خاصی

بسیار مفید است. ابزاری که ما را در رسیدن به هدف مذکور یاری می‌دهد، تابع شبکه[1] می‌باشد. تابع شبکه که به تابع سیستم هم معروف است، به‌صورت نسبت پاسخ خروجی، به تحریک ورودی در حوزه فرکانس تعریف می‌شود. از نظر ریاضی، اگر $Y(s)$ و $X(s)$ بترتیب تبدیل لاپلاس پاسخ (خروجی) $y(t)$ و ورودی (تحریک) $x(t)$ باشد، آنگاه تابع شبکه به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

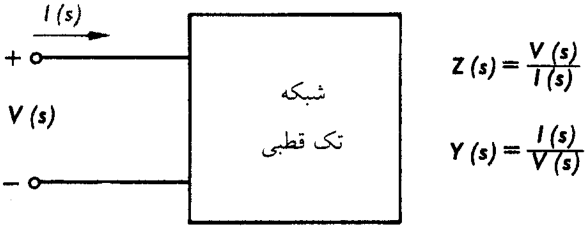
$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \qquad (۱-۹)$$

البته رابطه مذکور بر پایه نبود شرایط اولیه در مدار می‌باشد؛ به‌عبارت دیگر، سیستم تا پیش از اعمال تحریک ورودی، در حالت غیرفعال است. شکل دیگر بیان رابطه (۹-۱) به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$H(s)=\frac{\pounds[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\pounds[\text{ورودی یا تحریک}]} \qquad (۲-۹)$$

برای بیان توابع شبکه، روش‌های متعددی وجود دارد. یک حالت خاص از رابطه (۹-۲) آن است که $H(s)$ ، بیانگر رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم بدون وجود حالت اولیه برای متغیرها باشد. به‌عبارت دیگر، $H(s)$ می‌تواند برای بیان یک پاسخ ولتاژی به یک تحریک ورودی جریانی یا ولتاژی تعریف شود. همچنین یک پاسخ جریانی به یک تحریک ورودی جریانی یا ولتاژی نیز می‌تواند تعریف دیگری از تابع شبکه باشد. به‌عنوان مثال، امپدانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی را می‌توان به‌صورت نسبت فازوری ولتاژ خروجی حالت دائمی (بدون اثر شرایط اولیه سیستم) به فازور نمایشگر جریان ورودی سینوسی تعریف نمود. این تعریف امپدانس به‌عنوان یک تعریف خاص از تابع شبکه است. پس به‌طور خلاصه می‌توان گفت که تابع امپدانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی، به‌صورت نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ ولتاژ حالت صفر به تبدیل لاپلاس جریان تحریک کننده بیان می‌شود. در نتیجه، امپدانس‌های نقطه تحریک یک مقاومت، سلف و خازن بترتیب برابر R ، sL ، و $1/sC$ می‌باشد. همچنین تابع ادمیتانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی را می‌توان به‌صورت تبدیل لاپلاس پاسخ جریان حالت صفر به تبدیل لاپلاس ولتاژ ورودی تعریف کرد. لذا ادمیتانس‌های نقطه تحریک یک مقاومت، سلف و خازن، بترتیب برابر $1/R$ ، $1/sL$ ، و sC می‌باشد. در شکل (۹-۱) تابع شبکه امپدانسی و ادمیتانسی تعریف شده است که برای هر شبکه در حالت دائمی سینوسی با هر مجموعه از عناصر سلف، خازن و مقاومت که به شکل‌های سری و موازی قرار گرفته باشند، صادق است.

[1]- Network Function



شکل (۹-۱): نمایش تابع شبکه امپدانسی و ادمیتانسی

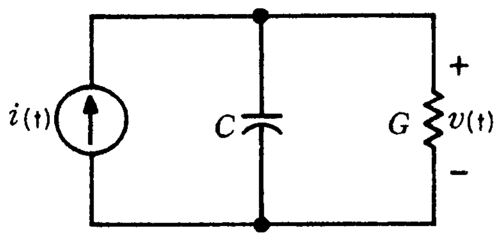
مثال (۹-۱): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۲)، با فرض آنکه منبع ورودی $i(t)$ باشد و ولتاژ $v(t)$ پاسخ حالت صفر باشد، آنگاه تابع امپدانسی نقطه تحریک را بیابید.

حل: با توجه به موازی بودن R و C و انتقال تمام عناصر به حوزه لاپلاس خواهیم داشت:

$$V(s) = \frac{۱}{G + sC} \cdot I(s)$$

که $G = \frac{1}{R}$ و $Y_C = sC$ می‌باشد. حال تابع امپدانس نقطه تحریک برابر است با:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{۱}{G + sC}$$



شکل (۹-۲): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۱)

مثال (۹-۲): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۳- الف) که در حوزه زمان رسم شده است، تابع ادمیتانسی نقطه تحریک را در حوزه فرکانس بیابید.

حل: برای رسیدن به تابع ادمیتانسی، ابتدا مدار موردنظر را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم که در شکل (۹-۳- ب) نشان داده شده است. سپس با نوشتن معادلات KVL خواهیم داشت:

$$V(s) = (۲ + ۳s)I_۱(s) - ۳sI_۲(s)$$

$$o = -۳sI_۱(s) + (۴s + \frac{۲}{s})I_۲(s)$$

که اگر روابط اخیر را به‌طور ماتریسی بیان کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲+۳s & -۳s \\ -۳s & ۴s+\frac{۲}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱(s) \\ I_۲(s) \end{bmatrix}$$

با استفاده از معکوس‌گیری از ماتریس انتقال می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_۱(s) \\ I_۲(s) \end{bmatrix} = \frac{s}{۳s^۳+۸s^۲+۶s+۴} \cdot \begin{bmatrix} ۴s+\frac{۲}{s} & ۳s \\ ۳s & ۲+۳s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ o \end{bmatrix}$$

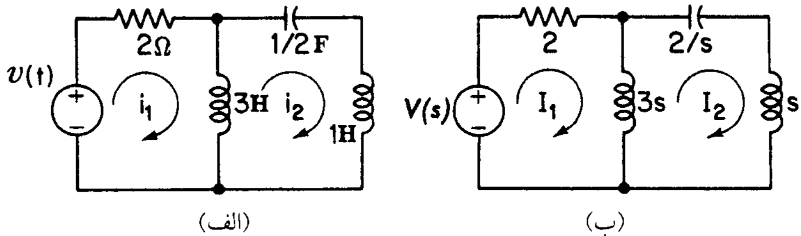
در نتیجه، تابع شبکه بین متغیرهای $I_۱(s)$ و $V(s)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y(s) = \frac{I_۱(s)}{V(s)} = \frac{۴s^۲+۲}{۳s^۳+۸s^۲+۶s+۴}$$

در نهایت، معادله دیفرانسیل در حوزه زمان بین دو متغیر $i_۱(t)$ و $v(t)$ به‌شکل زیر تبدیل می‌شود:

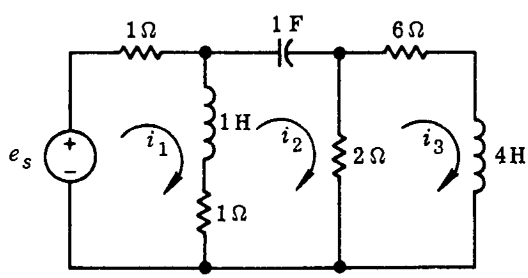
$$۴v''(t)+۲v(t) = ۳i_۱'''(t)+۸i_۱''(t)+۶i_۱'(t)+۴i_۱(t)$$

که علامت پریم به‌معنای مشتق‌گیری برحسب زمان است و تعداد پریم‌ها به‌معنای مرتبه مشتق‌گیری است.



شکل (۹-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۲)

تمرین (۹-۱): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۴) و با استفاده از معادلات حلقه، امپدانس دیده‌شده از دو سر منبع را به‌وسیله تابع شبکه $E(s)/I_۱(s)$ بیابید.

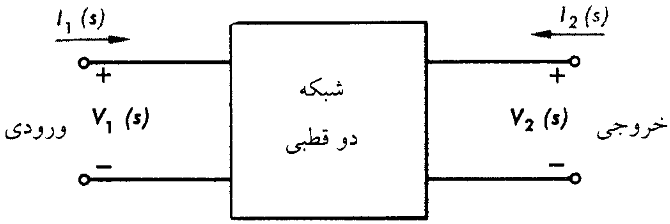


شکل (۹-۴): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۱)

جواب: $\frac{E(s)}{I_1(s)} = \frac{3s^2+8s+4}{s^2+4s+2}$

۹-۳- تابع شبکه به‌صورت تابع انتقال

معمولاً تابع شبکه به‌صورت یافتن پاسخ اندازه گیری‌شده در یک جفت پایانه (به عنوان خروجی) به تحریک اعمال‌شده در یک جفت پایانه دیگر (به عنوان ورودی) مطرح می‌گردد. این حالت را می‌توان در شکل (۹-۵) مشاهده نمود که در این وضعیت، تابع شبکه را تابع انتقال می‌نامیم. به‌عنوان مثال، می‌توان بهرهٔ یک تقویت کننده را که به‌صورت نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به‌کار می‌رود، به‌عنوان یک تابع انتقال در نظر گرفت.



توابع شبکه : $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ $\frac{V_2(s)}{I_1(s)}$ $\frac{I_2(s)}{V_1(s)}$ $\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$

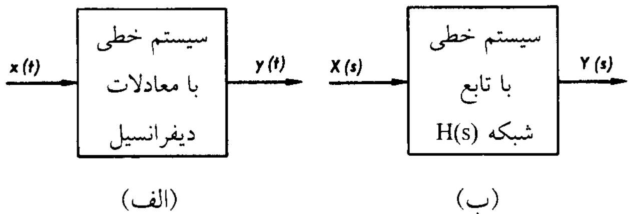
شکل (۹-۵): نمایش توابع انتقال در شبکه

یکی دیگر از کاربردهای تابع شبکه، در تحلیل مدارهای خطی می‌باشد که در شکل (۹-۶- الف) نشان داده شده است که بیانگر پاسخ $y(t)$ به‌ازای تحریک ورودی $x(t)$ می‌باشد. البته همین موضوع را می‌توان در حوزه فرکانس نیز بیان نمود (شکل (۹-۶- ب) را ببینید). در حوزه زمان، ارتباط بین ورودی $x(t)$ و پاسخ $y(t)$ با یک معادله دیفرانسیل بیان می‌گردد که شکل کلی این معادله به‌صورت زیر است:

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_o x = b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_o y \quad (۹-۳)$$

حال با انتقال این رابطه به حوزه فرکانس، قادریم تا با استفاده از تبدیل لاپلاس، شکل معادله را ساده‌تر و حل آن را آسان‌تر کنیم. برای این منظور، با فرض آنکه شرایط اولیه برای متغیرهای سیستم وجود نداشته باشد، آنگاه داریم:

$$\left(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_o\right)X(s) = \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_o\right)Y(s) \quad (۹-۴)$$



شکل (۹-۶): نمایش یک سیستم خطی در حوزه زمان و فرکانس

بنابراین، تابع انتقال سیستم برابر است با:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\ldots+a_1 s+a_o}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s+b_o}=\frac{A(s)}{B(s)} \qquad (۹-۵)$$

به عبارت دیگر، با استفاده از تابع شبکه $H(s)$ ، می‌توان پاسخ سیستم را به هر ورودی $X(s)$ به‌صورت زیر مشخص نمود:

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{A(s)}{B(s)}X(s) \qquad (۹-۶)$$

به عنوان مثال، برای تحریک (ورودی) به‌صورت $X(s)=P(s)/Q(s)$ معادله اخیر به‌شکل زیر در می‌آید:

$$Y(s)=\frac{A(s)}{B(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (۹-۷)$$

که برای به‌دست آوردن $y(t)$ کافی است که رابطه (۹-۷) را به‌وسیله تجزیه به کسرهای ساده به حوزه زمان انتقال داد. یعنی،

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-s_i}+\sum_{j=1}^{k}\frac{k_j}{s-s_j} \qquad (۹-۸)$$

که در این رابطه، ریشه‌های s_i (i از ۱ تا n) مربوط به ریشه‌های معادله مشخصه $B(s)$ و ریشه‌های s_j (j از ۱ تا m) مربوط به ریشه‌های معادله مشخصه $Q(s)$ می‌باشد. در نتیجه،

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{s_i t}+\sum_{j=1}^{n}k_j e^{s_j t} \qquad (۹-۹)$$

که جملات قسمت اول در سمت راست معادله اخیر، متناظر با پاسخ طبیعی سیستم (پاسخ بدون ورودی) است. به‌عبارت دیگر، این جملات، از تابع سیستم $H(s)=A(s)/B(s)$ ناشی می‌شود و مستقل از تابع تحریک (ورودی) است. همچنین جملات قسمت دوم در سمت راست معادله اخیر، مربوط به پاسخ ورودی است.

مثال (۹-۳): در یک مدار الکتریکی، تابع شبکه آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$H(s)=\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}$$

الف) در صورتی که ورودی به‌صورت $x(t)=u(t)$ باشد آنگاه خروجی $y(t)$ را بیابید.

ب) در صورتی که ورودی به‌صورت $x(t)=e^{-۲t}$ باشد قسمت (الف) را تکرار کنید.

ج) معادله دیفرانسیلی که بیانگر رابطه بین $x(t)$ و $y(t)$ می‌باشد را به‌دست آورید.

حل: الف) با توجه به آنکه $\pounds[u(t)]=\frac{۱}{s}$ می‌باشد آنگاه رابطه (۹-۶) را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}\cdot\frac{۱}{s}$$

حال برای به‌دست آوردن $y(t)$ از روش تجزیه کسرها استفاده می‌شود. یعنی،

$$Y(s)=\frac{k_۱}{s+۱}+\frac{k_۲}{s+۴}+\frac{k_۳}{s}$$

که ثابت‌های $k_۱$ ، $k_۲$ ، و $k_۳$ به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k_۱=\left.\frac{۲(s+۲)}{s(s+۴)}\right|_{s=-۱}=\frac{-۲}{۳}$$

$$k_۲=\left.\frac{۲(s+۲)}{s(s+۱)}\right|_{s=-۴}=\frac{-۱}{۳}$$

$$k_۳=\left.\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}\right|_{s=o}=+۱$$

و در نتیجه، تبدیل معکوس لاپلاس برای محاسبه $y(t)$ برابر است با:

$$y_۱(t)=\frac{-۲}{۳}e^{-t}-\frac{۱}{۳}e^{-۴t}+۱$$

قابل توجه است که مقدار $k_۳$ برابر مقدار تابع شبکه $H(s)$ به‌ازای مقدار s تحریک (که در این مثال برابر صفر است $s=o$) می‌باشد. دو جمله اول در رابطه اخیر، مربوط به پاسخ ورودی صفر و جمله آخر، در ارتباط با پاسخ حالت صفر می‌باشد که بترتیب از توابع $H(s)$ و $X(s)$ ناشی می‌شوند.

ب) در صورتی که $x(t)=e^{-۲t}$ باشد آنگاه $X(s)=\frac{۱}{s+۲}$ خواهد بود و در نتیجه،

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}\cdot\frac{۱}{s+۲}$$

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$Y(s)=\frac{k_۱}{s+۱}+\frac{k_۲}{s+۴}+\frac{k_۳}{s+۲}$$

که ضرایب $k_۱$ ، $k_۲$ ، و $k_۳$ را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

$$k_۱=\left.\frac{۲(s+۲)}{(s+۲)(s+۴)}\right|_{s=-۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$k_۲=\left.\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۲)}\right|_{s=-۴}=\frac{-۲}{۳}$$

$$k_۳=\left.\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}\right|_{s=-۲}=o$$

بنابراین، با استفاده از ضرایب $k_۱$ تا $k_۳$ و تبدیل لاپلاس معکوس، رابطه $y(t)$ محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{y(t)}=\frac{۲}{۳}e^{-t}-\frac{۲}{۳}e^{-۴t}$$

در این رابطه، خروجی $y(t)$ فقط شامل جملات مربوط به پاسخ ورودی صفر است و پاسخ حالت صفر، برابر صفر می‌باشد؛ زیرا مقدار $k_۳=o$ می‌باشد. البته مقدار $k_۳$ از رابطه $k_۳=H(s)|_{s=-۲}$ حاصل می‌شود که روش حل، مشابه حالت (الف) می‌باشد. علت عدم وجود پاسخ حالت صفر، آن است که جمله $s+۲$ از صورت و مخرج تابع خروجی $Y(s)$ حذف می‌شود. پس،

$$Y(s)=\frac{۲}{(s+۱)(s+۴)}=\frac{۲/۳}{s+۱}+\frac{-۲/۳}{s+۴}$$

که با استفاده از رابطه اخیر به همان خروجی $y(t)$ می‌رسیم.

ج) برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل مربوط به ارتباط ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{۲(s+۲)}{(s+۱)(s+۴)}\cdot X(s)$$

و در نتیجه،

$$(s+۱)(s+۴)\cdot Y(s)=۲(s+۲)\cdot X(s)$$

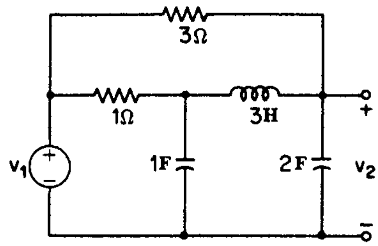
و،

$$(s^۲+۵s+۴)\cdot Y(s)=(۲s+۴)\cdot X(s)$$

حال اگر رابطه اخیر را به حوزه زمان انتقال دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{d^۲y}{dt^۲}+۵\frac{dy}{dt}+۴y=۲\frac{dx}{dt}+۴x$$

تمرین (۹-۲): برای شبکه الکتریکی نشان داده شده در شکل (۹-۷)، ابتدا معادلات دیفرانسیل مدار را در حوزه زمان و سپس در حوزه فرکانس به‌دست آورده و در نهایت، تابع شبکه $H(s) = {}^{V_۲(s)}\!/_{V_۱(s)}$ را بیابید.



شکل (۹-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۲)

جواب: $H(s) = \dfrac{۳s^۲ + ۳s + ۴}{۱۸s^۳ + ۲۱s^۲ + ۱۲s + ۴}$

۹-۴- قطب‌ها، صفرها و تابع شبکه

در بخش قبل، دیدیم که جملات مربوط به پاسخ حالت صفر و ورودی صفر در خروجی $y(t)$ ، ارتباط نزدیکی با تابع شبکه دارد. برای تشریح بهتر مطالب ارائه شده در بخش اول، باید مفاهیم قطب‌ها و صفرهای تابع $H(s)$ را بیان نماییم. بدین منظور فرض کنید که،

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-۱} s^{m-۱} + \ldots + a_۱ s + a_o}{b_n s^n + b_{n-۱} s^{n-۱} + \ldots + b_۱ s + b_o} \qquad (۹-۱۰)$$

که $A(s)$ و $B(s)$ چند جمله ای‌هایی برحسب متغیر s است و a_o تا a_m و b_o تا b_n اعداد حقیقی هستند. که هر یک از آنها، مجموعه‌ای از حاصل ضرب‌های مقادیر اجزاء مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها و دیگر عناصر شبکه می‌باشد. حال این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه نمود:

$$H(s) = k \cdot \frac{\prod_{i=۱}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=۱}^{n} (s - p_j)} \qquad (۹-۱۱)$$

در این رابطه، k یک ضریب حقیقی است و z_iها (برای i از ۱ تا m) صفرهای تابع شبکه و p_jها (برای از j از ۱ تا n) معرف قطب‌های تابع شبکه می‌باشند. پس برای محاسبه قطب‌های تابع $H(s)$ ، باید جواب‌های معادله $B(s)=o$ را محاسبه نمود (به این قطب‌ها، فرکانس‌های طبیعی نیز می‌گوییم که در ادامه در این مورد صحبت می‌کنیم). لذا در صورتی که $B(s)=o$ باشد، آنگاه تابع $H(s)$ به سمت بینهایت میل می‌کند. به‌عبارت دیگر، ریشه‌های معادله $B(s)=o$ ، تابع شبکه را به سمت بینهایت سوق می‌دهد.

حال اگر در یک سیستم خطی با تابع شبکه $H(s)$ ، ورودی (تحریک) به‌صورت یک تابع ضربه واحد $\delta(t)$ باشد، آنگاه با توجه به آنکه $\pounds[\delta(t)]=1$ است لذا خروجی $Y(s)$ برابر $H(s)$ خواهد بود و در نتیجه،

$$y(t)=\pounds^{-1}[H(s)]=\sum_{j=1}^{n}k_j e^{p_j t} \tag{۱۲-۹}$$

که در این رابطه، مقادیر p_j ، قطب‌های $H(s)$ و ضرایب k_j مربوط به تجزیه به کسرهای ساده تابع $H(s)$ می‌باشد. لذا در می‌یابیم که $\pounds^{-1}[H(s)]$ بیانگر پاسخ ورودی صفر سیستم می‌باشد.

همچنین برای تعیین صفرهای تابع شبکه $H(s)$ ، کافی است که ریشه‌های چند جمله‌ای معادله $A(s)=o$ را محاسبه نمود. معنی فیزیکی هر صفر، بیانگر فرکانس مختلطی از تحریک (ورودی) است که به‌ازای آن، پاسخ حالت صفر، برابر صفر می‌گردد. این موضوع را می‌توان در قسمت (ب) از مثال (۹-۳) مشاهده نمود.

برای درک بهتر مفاهیم قطب‌ها و صفرها، فرض کنید که تحریکی به‌صورت $A_o e^{s_o t}$ به سیستم اعمال گردد که این ورودی، دارای هر دو مولفه AC و DC است. در نتیجه، پاسخ سیستم در حوزه فرکانس برابر است با:

$$Y(s)=H(s)\frac{A_o}{s-s_o} \tag{۱۳-۹}$$

حال اگر تابع $Y(s)$ را به کسرهای ساده‌ای تجزیه کنیم داریم:

$$Y(s)=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{s-p_j}+\frac{k_o}{s-s_o} \tag{۱۴-۹}$$

که جمله اول در سمت راست معادله اخیر، بیانگر تجزیه تابع $H(s)$ به‌ازای قطب‌های آن است که پاسخ ورودی صفر را می‌دهد، همچنین جمله $\frac{k_o}{s-s_o}$ هم ناشی از تحریک است و پاسخ حالت صفر را بیان می‌کند. مقدار k_o را می‌توان از رابطه زیر پیدا کرد:

$$k_o=(s-s_o)Y(s)\big|_{s=s_o}=A_o H(s_o) \tag{۱۵-۹}$$

و در نتیجه، پاسخ حالت صفر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

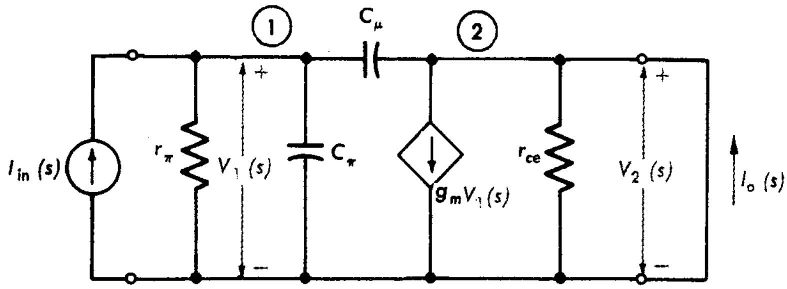
$$y_f(t) = A_o H(s_o) e^{s_o t} \qquad (۱۶-۹)$$

از رابطه اخیر در می‌یابیم که نسبت دامنه پاسخ حالت صفر به دامنه تحریک (A_o)، برابر مقدار تابع شبکه ($H(s)$) به‌ازای فرکانس تحریک (که برابر s_o است) می‌باشد.

مثال (۹-۴): شکل (۹-۸) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که قسمت میانی آن، بیانگر یک ترانزیستور می‌باشد. در این مدار، موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) تابع شبکه $I_o(s)/I_{in}(s)$ را تعیین کنید.

ب) در صورتی که $r_\pi = ۱۰۰۰\Omega$ ، $g_m = ۰/۲\frac{۱}{\Omega}$ ، $C_\pi = ۴۹pF$ ، و $C_\mu = ۱pF$ باشد و سیستم، بدون حالت اولیه برای متغیرهای خود باشد، آنگاه پاسخ $i_o(t)$ را به تحریک پله واحد تعیین نمایید.



شکل (۹-۸): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۴)

حل: الف) با توجه به آنکه ولتاژ گره ۲ برابر صفر است ($V_۲(s) = o$)، آنگاه معادله KCL در گره ۱ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$-I_{in}(s) + \frac{V_۱(s)}{r_\pi} + sC_\pi V_۱(s) + sC_\mu V_۱(s) = o$$

که در نتیجه،

$$V_۱(s) = \frac{I_{in}(s)}{\frac{۱}{r_\pi} + s(C_\pi + C_\mu)}$$

همچنین با نوشتن قانون KCL در گره ۲ داریم:

$$I_o(s) = g_m V_۱(s) - I_\mu(s) = g_m V_۱(s) - sC_\mu V_۱(s)$$

حال اگر مقدار $V_۱(s)$ را در معادله اخیر قرار دهیم آنگاه،

$$\frac{I_o(s)}{I_{in}(s)} = H(s) = \frac{g_m - sC_\mu}{\frac{۱}{r_\pi} + s(C_\pi + C_\mu)}$$

و یا،

$$H(s) = \frac{g_m r_\pi \left(۱ - \frac{sC_\mu}{g_m}\right)}{۱ + sr_\pi(C_\pi + C_\mu)} = \frac{-C_\mu(s - \frac{g_m}{C_\mu})}{(C_\pi + C_\mu)\left[s + \frac{۱}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)}\right]}$$

پس $H(s)$ دارای یک قطب و یک صفر است. قطب این تابع به‌مقدار،

$$p_۱ = -\frac{۱}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)}$$

و صفر این تابع شبکه برابر $z_۱ = g_m/C_\mu$ می‌باشد.

ب) در صورتی که تحریک (ورودی) سیستم، یک تابع پله واحد باشد آنگاه،

$$I_{in}(s) = \frac{۱}{s}$$

$$I_o(s) = H(s)I_{in}(s) = \frac{-C_\mu}{C_\pi + C_\mu} \times \frac{s - \frac{g_m}{C_\mu}}{s + \frac{۱}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)}} \times \frac{۱}{s}$$

حال اگر مقادیر ارائه‌شده در صورت مثال را در رابطه اخیر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$I_o(s) = \frac{-\frac{۱}{۵۰}(s - ۲\times ۱۰^{۱۱})}{s + ۲\times ۱۰^{۷}} \times \frac{۱}{s}$$

حال با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزیی می‌توان نوشت:

$$I_o(s) = \frac{k_۱}{s + ۲\times ۱۰^{۷}} + \frac{k_o}{s}$$

که،

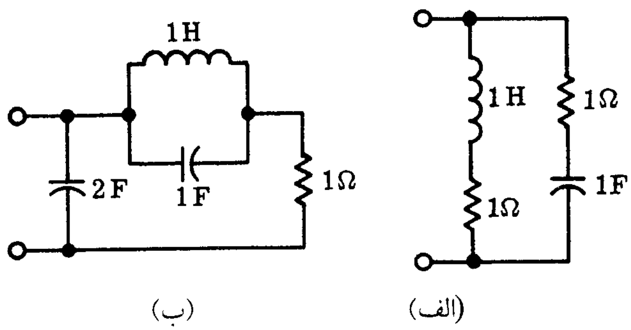
$$k_۱ = \left.\frac{-(s - ۲\times ۱۰^{۱۱})}{۵۰ s}\right|_{s=۲\times ۱۰^{۷}} = -۲۰۰$$

$$k_o = \left.\frac{-(s - ۲\times ۱۰^{۱۱})}{۵۰(s + ۲\times ۱۰^{۷})}\right|_{s=o} = +۲۰۰$$

با قرار دادن مقادیر k_1 و k_o در $I_o(s)$ و تعیین تبدیل معکوس لاپلاس نتیجه می‌گیریم که،

$$i_o(t) = -۲۰۰e^{-۲\times۱۰^۷ t} + ۲۰۰ = ۲۰۰(۱ - e^{-۲\times۱۰^۷ t})$$

تمرین (۹-۳): در مدارهای الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۹)، امپدانس‌های نقطه تحریک را بیابید و سپس قطب‌ها و صفرهای آن را محاسبه کنید.



شکل (۹-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۳)

جواب: الف) $Z(s) = ۱$ ؛ ب) $Z(s) = \dfrac{۲s^۳ + ۳s^۲ + ۲s + ۱}{s^۲ + s + ۱}$

۹-۵- فرکانس‌های طبیعی

در این بخش، برآنیم تا مفهوم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه و فرکانس‌های طبیعی یک شبکه را در حالت کلی ارائه نموده و راه‌های محاسبه این فرکانس‌ها را بیان نماییم. سپس در بخش بعدی، ارتباط فرکانس‌های طبیعی و تابع شبکه را تشریح می‌کنیم.

۹-۵-۱- فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه

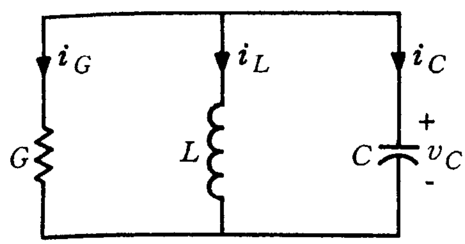
یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که تمام منابع نابسته در این شبکه، برابر صفر باشد. به‌عبارت دیگر، تمام منابع ولتاژ نابسته را اتصال کوتاه نموده و تمام منابع جریان نابسته را اتصال باز می‌کنیم. در این حالت، شبکه در شرایط ورودی صفر قرار دارد. حال اگر یکی از متغیرهای شبکه مذکور را در نظر بگیریم (از قبیل ولتاژ یک شاخه

یا یک گره، جریان یک شاخه یا یک حلقه) و برای آن متغیر، پاسخ ورودی صفر را به‌دست آوریم، آنگاه آن متغیر (که در حالت کلی با $y(t)$ نمایش دهیم) به‌شکل کلی زیر ظاهر می‌شود:

$$y(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \ldots \qquad t \geq 0 \qquad (17\text{-}9)$$

که k_i و s_i مقادیر ثابتی هستند. البته مقادیر s_i به توپولوژی و ساختار شبکه بستگی دارد و k_iها هم به شرایط اولیه اجزاء شبکه (سلف‌ها و خازن‌ها) بستگی دارند. مقادیر s_i در این شبکه را فرکانس‌های طبیعی متغیر موردنظر شبکه می‌نامیم. برای درک بهتر این موضوع، مثال زیر را بیان می‌کنیم.

مثال (۹-۵): مدار RLC ارائه‌شده در شکل (۹-۱۰) موردنظر است. در صورتی که مقادیر $C = 1\text{F}$ ، $R = \frac{1}{6}\Omega$ و $L = \frac{1}{25}\text{H}$ باشد آنگاه فرکانس طبیعی متغیرهای شبکه را بیابید.



شکل (۹-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۵)

حل: با استفاده از قانون KCL در گره موردنظر شبکه می‌توان نوشت:

$$\frac{v_C(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_o^t v_C(t)dt + i_L(o^-) + C\frac{dv_C(t)}{dt} = o$$

حال رابطه فوق را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم:

$$(Cs + \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls})V_C(s) = Cv_C(o^-) - \frac{1}{s}i_L(o^-)$$

و در نتیجه،

$$V_C(s) = \frac{sCv_C(o^-) - i_L(o^-)}{Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}} = \frac{sv_C(o^-) - i_L(o^-)}{(s+3)^2 + 4^2}$$

حال با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزیی داریم:

$$v_C(t) = $$
$$= \frac{(-۳ + j۴)v_C(o^-) - i_L(o^-)}{j۸} e^{(-۳+j۴)t} + \frac{(-۳ - j۴)v_C(o^-) - i_L(o^-)}{-j۸} e^{(-۳-j۴)t}$$

در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که براساس رابطه (۹-۱۷)، فرکانس‌های طبیعی متغیر ولتاژ $v_C(t)$ به‌مقدار $-۳ + j۴$ و $-۳ - j۴$ می‌باشد. همچنین می‌توان اثبات کرد که این فرکانس‌های طبیعی ولتاژ $v_C(t)$ ، فرکانس‌های طبیعی دیگر متغیرهای شبکه از قبیل $i_L(t)$ ، $v_C(t)$ ، $i_C(t)$ ، $v_C(t)$ ، و $v_R(t)$ می‌باشد.

از این مثال در می‌یابیم که برای هر متغیر شبکه مورد بحث، می‌توان یک معادله دیفرانسیل بر حسب زمان (که از جملات با مشتق‌های زمانی تشکیل شده است) به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، اگر $y(t)$ متغیر موردنظر باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل مربوط به پاسخ ورودی صفر آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q(D) \cdot y(t) = o \qquad (۱۸-۹)$$

که $Q(D)$ چند جمله‌ای برحسب مشتقات مرتبه‌های متعدد برحسب زمان است. در نتیجه، هر پاسخ ورودی صفر متغیر $y(t)$ شبکه، جوابی از معادله (۹-۱۸) است و برعکس، هر جوابی از معادله (۹-۱۸)، پاسخ ورودی صفر متغیر $y(t)$ متناظر با حالت اولیه مشخصی خواهد بود. حال برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی متغیر موردنظر $y(t)$ ، کافی است که ریشه‌های چند جمله‌ای $Q(D)$ را به‌دست آوریم. به‌عبارت دیگر، s_i یک فرکانس طبیعی متغیر $y(t)$ است، اگر و فقط اگر $Q(s_i) = o$ باشد. حال اگر s_i یک صفر مرتبه mام از چند جمله‌ای $Q(s)$ باشد، در این‌صوررت s_i را یک فرکانس طبیعی از مرتبه m ام برای متغیر موردنظر $y(t)$ می‌نامیم.

مثال (۹-۶): در صورتی که متغیر ولتاژ شبکه‌ای همراه با معادله دیفرانسیل زیر باشد، فرکانس‌های طبیعی آن متغیر را بیابید:

$$\left(\frac{d^۵}{dt^۵} + ۲\frac{d^۴}{dt^۴} + ۲\frac{d^۳}{dt^۳} + ۲\frac{d^۲}{dt^۲} + \frac{d}{dt}\right)v(t) = o$$

حل: معادله مذکور را به‌شکل زیر ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left(D^۵ + ۲D^۴ + ۲D^۳ + ۲D^۲ + D\right)v(t) = o$$

حال اگر رابطه فوق را تجزیه کنیم، خواهیم داشت:

$$D(D^۲ + ۱)(D + ۱)^۲ v(t) = o$$

در نتیجه، پاسخ ورودی صفر $v(t)$ برابر می‌شود با:

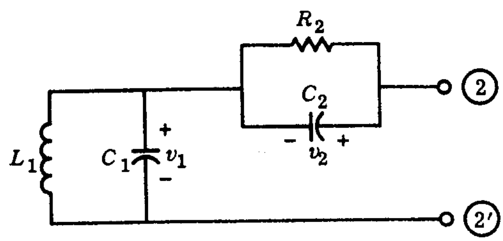
$$v(t) = k_۱ e^{jt} + k_۲ e^{-jt} + (k_۳ + k_۴ t)e^{-t} + k_۵$$

همان‌گونه که متوجه می‌شویم، فرکانس‌های طبیعی متغیر $v(t)$ ، برابر $s_1 = +j1$ ، $s_2 = -j1$ ، $s_3 = s_4 = -1$ ، و $s_5 = o$ می‌باشد که فرکانس طبیعی ۱- از مرتبه ۲ می‌باشد.

در این مثال می‌بینیم که یکی از فرکانس‌های طبیعی متغیر موردنظر برابر صفر ($s_5 = o$) می‌باشد که به این معنی است که پاسخ ورودی صفر، دارای یک جمله ثابتی است. از نظر فیزیکی، این حالت هنگامی اتفاق می‌افتد که در مدار الکتریکی موردنظر، متغیر مربوطه می‌تواند جریان سلفی باشد که این سلف، در داخل حلقه‌ای است که دیگر عناصر این حلقه را عناصر سلفی تشکیل می‌دهند (زیرا در این حالت ممکن است جریان عبوری از سلف‌ها ثابت باشد و لذا ولتاژی در دو سر آنها ایجاد نشود). حالت دیگری که ممکن است اتفاق افتد، آن است که متغیر شبکه موردنظر، ولتاژ خازنی باشد که این خازن، در گره‌ای قرار دارد که تمام عناصر دیگر متصل به آن گره نیز خازن باشند (در این‌صوررت، اگر ولتاژ دو سر خازنها ثابت باشد آنگاه جریان عبوری از خازن‌ها برابر صفر خواهد بود $C\dfrac{dv(t)}{dt} = o$).

لازم به‌ذکر است که اگر فرکانس‌های طبیعی مرتبه mام را همانند m فرکانس طبیعی در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان گفت که تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، معادل با مرتبه معادله دیفرانسیل متغیر مذکور است.

مثال (۹-۷): در این مثال، می‌خواهیم نشان دهیم که فرکانس‌های طبیعی دو متغیر یک شبکه، لزومی ندارد که با یکدیگر مساوی باشند. بدین منظور مدار ارائه‌شده در شکل (۹-۱۱) را در نظر بگیرید که در آن، سرهای ۲ و ′۲ به‌صورت مدار باز هستند. فرکانس‌های طبیعی متغیرهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.

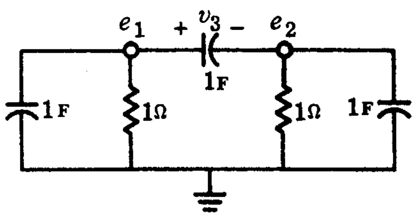


شکل (۹-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۷)

حل: با توجه به مطالب ارائه‌شده در این بخش در می‌یابیم که فرکانس‌های طبیعی متغیر $v_1(t)$ برابر دو فرکانس $\pm j \,{}^{1}\!/\!\sqrt{L_1C_1}$ می‌باشد و این در حالی است که فرکانس‌های طبیعی متغیر $v_2(t)$ فقط $-{}^{1}\!/_{R_2C_2}$ است که با یکدیگر برابر نیستند. این موضوع وقتی

با اهمیت‌تر می‌شود که با درک مفهوم فرکانس‌های طبیعی شبکه (که در بخش بعدی ارائه می‌شود) در می‌یابیم که فرکانس‌های طبیعی این شبکه با استفاده از روش حل گره برابر $-\frac{1}{R_2C_2}$ و $\pm j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ می‌باشد.

تمرین (۹-۴): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۱۲)، فرکانس‌های طبیعی متغیرهای ولتاژهای گره e_1 و e_2 و متغیر v_3 را بیابید.



شکل (۹-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۴)

جواب: فرکانس‌های طبیعی متغیرهای e_1 و e_2 برابر ۱- و $-\frac{1}{3}$ ، و فرکانس‌های طبیعی متغیر v_3 برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۹-۵-۲- فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

در این بخش، می‌خواهیم به‌جای آنکه فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را در نظر بگیریم، فرکانس‌های طبیعی کل یک شبکه را مطرح نماییم. بدین منظور، مقدار s_k را فرکانس طبیعی یک شبکه می‌نامیم، اگر s_k فرکانس طبیعی ولتاژ و یا جریان متغیری از متغیرهای شبکه باشد. به‌عنوان نمونه در مثال (۹-۷)، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر برابر $\pm j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ و $-\frac{1}{R_2C_2}$ است که مجموعه فرکانس‌های طبیعی متغیرهای v_1 و v_2 می‌باشد. البته در ادامه خواهیم دید که برای تعیین فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، هیچ لزومی به محاسبه کلیه فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه وجود ندارد که در ادامه توضیح داده می‌شود.

به منظور واضح‌تر شدن موضوع، فرض کنید که $s_i \neq o$ فرکانس طبیعی جریان یک شاخه باشد، آنگاه می‌توان گفت که s_i فرکانس طبیعی ولتاژ همان شاخه نیز خواهد بود. برای اثبات این موضوع فرض کنید که جریان شاخه موردنظر برای فرکانس طبیعی s_i برابر $k_ie^{s_it}$ باشد. حال اگر شاخه موردنظر، یک مقاومت با مقدار R_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر

آن دارای جمله $k_i R_i e^{s_i t}$ است و اگر شاخه مذکور، یک سلف با اندوکتانس L_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر سلف (با توجه به رابطه $v_i = L_i \frac{di(t)}{dt}$) دارای جمله $L_i k_i s_i e^{s_i t}$ خواهد بود و در نهایت، اگر شاخه موردنظر، یک خازن با ظرفیت خازنی C_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر آن (با توجه به رابطه $v_i(t) = v(o^-) + \frac{1}{C}\int_o^t i_i(t)dt$) دارای جمله‌ای به‌صورت $C_i k_i \frac{1}{s_i} e^{s_i t}$ است که می‌بینیم در تمام حالات فوق، فرکانس طبیعی s_i ظاهر می‌شود.

لازم به‌ذکر است که شرط $s_i \neq o$ به این علت است که اگر جریان عبوری از سلفی به‌مقدار ثابتی باشد، آنگاه ولتاژ دو سر آن، صفر است و اگر ولتاژ دو سر خازنی به‌مقدار ثابتی باشد بالطبع، جریان عبوری از آن، صفر خواهد بود. لذا $s_i = o$ ممکن است فرکانس طبیعی جریان شاخه‌ای باشد، بدون آنکه فرکانس طبیعی ولتاژ آن شاخه نیز باشد و برعکس.

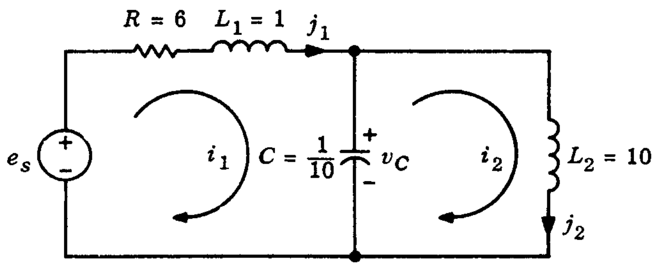
از مطالب فوق در می‌یابیم که برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیر صفر یک شبکه می‌توان از هر روش تجزیه و تحلیل (گره یا حلقه) استفاده نمود. در واقع اگر مثلاً $s_i \neq o$ فرکانس طبیعی جریان یک حلقه باشد، آنگاه لزوماً فرکانس طبیعی ولتاژ هر یک از عناصر آن حلقه نیز خواهد بود و برعکس. حال این مطالب را در حالت کلی به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه: یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که تمام منابع نابسته در آن حذف شده و فقط شرایط اولیه برای متغیرها وجود داشته و شبکه به حوزه فرکانس منتقل شده باشد. حال اگر از طریق روش حلقه یا گره، تمام معادلات حلقه یا گره‌های شبکه را بنویسیم و آنها را به‌صورت ماتریسی بیان کنیم، آنگاه در حالت کلی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{P(s).X=f}$$

که در این رابطه، **X** بردار متغیرهای جریان‌های حلقه‌ها (در روش تحلیل حلقه) و یا متغیرهای ولتاژهای گره‌ها (در روش تحلیل گره)، **f** برداری در ارتباط با مقادیر اولیه ولتاژ و جریان خازن‌ها و سلف‌های مدار، و ماتریس **P(s)** ماتریس مربوط به توپولوژی شبکه می‌باشد. حال برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی شبکه مذکور، کافی است که ریشه‌های چند جمله‌ای حاصل‌شده از دترمینان ماتریس **P(s)** را محاسبه نمود.

مثال (۹-۸): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۱۳) مفروض است. فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر را بیابید. فرض کنید که ولتاژ اولیه خازن برابر $v_C(o^-)$ و جریان اولیه سلف‌ها برابر $j_1(o^-)$ و $j_2(o^-)$ می‌باشد.



شکل (۹-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۸)

حل: ابتدا با استفاده از روش حلقه، دو معادله مربوط به دو حلقه را می‌نویسیم. البته با توجه به آنکه در تعیین فرکانس‌های طبیعی شبکه، منابع نابسته بی تأثیر هستند، لذا منابع ولتاژ را به‌صورت اتصال کوتاه فرض می‌کنیم. لذا داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}+6i_1+10\int i_1(t)dt-10\int i_2(t)dt=-v_C(o^-) \\ -10\int i_1(t)dt+10\dfrac{di_2(t)}{dt}+10\int i_2(t)dt=v_C(o^-) \end{cases}$$

حال روابط اخیر را به حوزه لاپلاس انتقال می‌دهیم.

$$sI_1(s)-j_1(o^-)+6I_1(s)+\frac{10}{s}I_1(s)-\frac{10}{s}I_2(s)=\frac{-V_C(o^-)}{s}$$

$$-\frac{10}{s}I_1(s)+10sI_2(s)-10j_2(o^-)+\frac{10}{s}I_2(s)=\frac{V_C(o^-)}{s}$$

با ضرب دو رابطه اخیر در متغیر s و مرتب نمودن آن داریم:

$$\begin{cases} (s^2+6s+10)I_1(s)+(-10)I_2(s)=-V_C(o^-)+sj_1(o^-) \\ (-10)I_1(s)+(10s^2+10)I_2(s)+=V_C(o^-)+10sj_2(o^-) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} s^2+6s+10 & -10 \\ -10 & 10s^2+10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -V_C(o^-)+sj_1(o^-) \\ V_C(o^-)+10sj_2(o^-) \end{bmatrix}$$

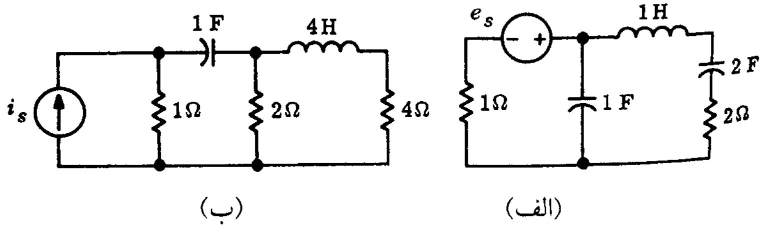
اکنون دترمینان ماتریس ضرایب را به‌دست می‌آوریم که،

$$\Delta[P(s)]=(s^2+6s+10)(10s^2+10)-100=o$$

$$(s^4+6D^3+11D^2+6D)=o$$

که ریشه‌های معادله اخیر، برابر ۰ ، ۱- ، ۲- ، و ۳- می‌باشد که در واقع، همان فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر می‌باشد.

تمرین (۹-۵): فرکانس طبیعی متغیرهای شبکه‌های نشان داده شده در شکل (۹-۱۴) را بیابید.



شکل (۹-۱۴): شبکه‌های الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۵)

جواب: الف) $s_1 = o$, $s_{2,3} = -1/42 \pm j1$ ؛ ب) $s_1 = -1$, $s_2 = -1/2$

۹-۶- تعیین فرکانس‌های طبیعی با استفاده از تابع شبکه

در بخش قبل، مفاهیم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر و یک شبکه را بررسی نمودیم و نحوه تعیین آنها را ارائه دادیم. دیدیم که فرکانس‌های طبیعی غیر صفر هر شبکه ای، همان صفرهای دترمینان دستگاه معادلاتی است که به‌وسیله هر روش کلی تجزیه و تحلیل مدار (از قبیل روش حل گره یا حلقه) به‌دست آمده است. حال با توجه به اهمیت فرکانس‌های طبیعی در درک خصوصیات شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، در این بخش، روابط میان فرکانس‌های طبیعی یک شبکه و قطب‌های یک تابع شبکه را بررسی خواهیم کرد.
با توجه به آنکه فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، فقط به توپولوژی شبکه و مقادیر اجزاء آن بستگی دارد و به ورودی شبکه و منابع نابسته آن وابسته نمی‌باشد؛ لذا در هنگام محاسبه فرکانس‌های طبیعی، تمام منابع نابسته را برابر صفر قرار می‌دهیم. در این وضعیت، کلیه منابع ولتاژ نابسته را اتصال کوتاه، و منابع جریان نابسته را مدار باز می‌کنیم تا اثرات این منابع، در سیستم حذف گردد. به این نوع شبکه‌ها، شبکه‌های بی تحریک می‌گویند. حال می‌خواهیم با استفاده از این شبکه بی تحریک[1] و با استفاده از منابع نابسته جریان یا ولتاژ، فرکانس‌های طبیعی سیستم را به‌دست آوریم.

[1]- Unforced Networks

الف) استفاده از منبع نابسته جریان: در این روش، فرض کنید که یک منبع نابسته با جریان $i_o(t)$ به شبکه بی‌تحریک تزریق شود. این تزریق، باید به‌گونه‌ای باشد که حذف منبع مذکور (یعنی باز شدن آن) تأثیری در شبکه بی تحریک نگذارد. بدین منظور، باید دو سر منبع جریان به دو گره از گره‌های شبکه موردنظر متصل شود. به‌عبارت دیگر، دو سر منبع جریان مذکور به دو گره، لحیم می‌شود. این موضوع در شکل (۹-۱۵- الف) نشان داده شده است. حال امپدانس نقطه تحریک را در حوزه فرکانس که به‌وسیله منبع جریان دیده می‌شود، به‌دست می‌آوریم که برابر است با:

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I_o(s)}=\frac{\pounds[v(t)]}{\pounds[i_o(t)]} \tag{۹-۱۹}$$

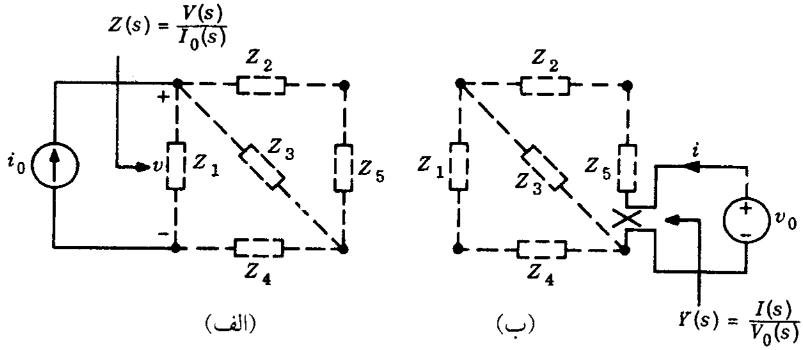
که $I_o(s)$ تبدیل لاپلاس منبع جریان $i_o(t)$ و $V(s)$ تبدیل لاپلاس ولتاژ دو سر منبع است.

اکنون باید گفت که قطب‌های $Z(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی متغیر $v(t)$ است و در نتیجه، فرکانس‌های طبیعی شبکه مذکور نیز خواهد بود. این موضوع از آنجا نتیجه می‌شود که با به‌کار بردن منبع جریان مذکور، توپولوژی و مقادیر اجزاء شبکه بی تحریک تغییر نمی‌یابد و لذا تغییری در رفتار طبیعی شبکه ایجاد نمی‌شود. لذا می‌توان نتیجه گرفت که قطب‌های $Z(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

ب) استفاده از منبع نابسته ولتاژ: در این روش، مشابه روش قبل، یک منبع نابسته با ولتاژ $v_o(t)$ به شبکه بی‌تحریک تزریق می‌شود. منبع ولتاژ مذکور باید به‌گونه‌ای وارد شبکه گردد که با حذف آن (یعنی اتصال کوتاه شدن دو سر آن) تأثیری در شبکه نگذارد. بدین منظور، برای تزریق منبع ولتاژ مذکور، یک شاخه از شبکه بی تحریک را قطع کرده و منبع ولتاژ را در آنجا قرا ر دهیم. به‌عبارت دیگر، با بریده شدن یک شاخه دلخواه، دو سر منبع ولتاژ به دو سر بریده‌شده متصل می‌شود. این موضوع در شکل (۹-۱۵- ب) نشان داده شده است. حال برای تعیین فرکانس‌های طبیعی شبکه، لازم است ادمیتانس نقطه تحریک $Y(s)$ را که به‌وسیله منبع ولتاژ دیده می‌شود، محاسبه نمود. یعنی،

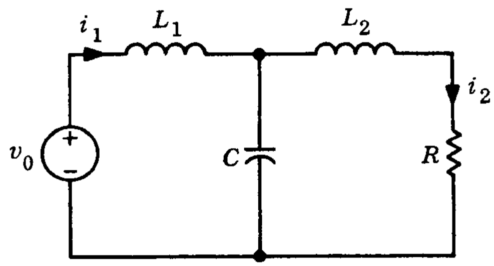
$$Y(s)=\frac{I(s)}{V_o(s)}=\frac{\pounds[i(t)]}{\pounds[v_o(t)]} \tag{۹-۲۰}$$

براساس مطالب ارائه‌شده در بخش قبل، می‌دانیم که قطب‌های $Y(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی متغیر $i(t)$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان گفت که این فرکانس‌های طبیعی متغیر $i(t)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر نیز می‌باشد.



شکل (۹-۱۵): نحوه اتصال منبع نابسته برای تعیین فرکانس‌های طبیعی: الف) اتصال منبع جریان؛ ب) اتصال منبع ولتاژ

مثال (۹-۹): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۱۶) یک صافی پایین گذر را نشان می‌دهد. حال با قرار دادن یک منبع ولتاژ $v_o(t)$ و با محاسبه جریان $i_۱(t)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه را پیدا کنید.



شکل (۹-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۹)

حل: برای یافتن فرکانس‌های طبیعی شبکه مذکور، باید ادمیتانس انتقال $H(s) = {I_۱(s)}/{V_o(s)}$ را پیدا کنیم که $I_۱(s)$ و $V_o(s)$ ، تبدیل لاپلاس متغیرهای $i_۱(t)$ و $v_o(t)$ است. بدین منظور، با استفاده از روش تجزیه و تحلیل حلقه، معادلات مربوطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (L_۱ s + \frac{۱}{Cs})I_۱(s) - \frac{۱}{Cs} I_۲(s) = V_o(s) \\ -\frac{۱}{Cs} I_۱ + (R + L_۲ s + \frac{۱}{Cs}) I_۲(s) = o \end{cases}$$

البته فرض شده است که تمام متغیرهای شبکه در حالت صفر قرار دارند. حال از این دو معادله اخیر، $I_۱(s)$ را پیدا می‌کنیم. یعنی،

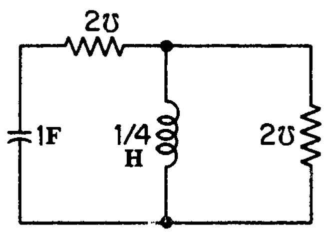
$$I_1(s)=\frac{V_O(s)\left(R+L_2 s+\frac{1}{Cs}\right)}{L_1L_2s^2+RL_1s+\frac{(L_1+L_2)}{C}+\frac{R}{Cs}}=\frac{V_O(s)\left(1+L_2Cs^2+RCs\right)}{L_1L_2Cs^3+RL_1Cs^2+(L_1+L_2)s+R}$$

بنابراین، تابع شبکه ادمیتانس برابر است با:

$$H(s)=\frac{I_1(s)}{V_O(s)}=\frac{1+L_2Cs^2+RCs}{L_1L_2Cs^3+RL_1Cs^2+(L_1+L_2)s+R}$$

که قطب‌های این تابع، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر است. به‌عبارت دیگر، ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه $L_1L_2Cs^3+RL_1Cs^2+(L_1+L_2)s+R=o$ بیانگر فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

تمرین (۹-۶): فرکانس‌های طبیعی شبکه ارائه‌شده در شکل (۹-۱۷) را با استفاده از منبع ولتاژ و منبع جریان که در ارتباط با خازن 1F باشند، به‌دست آورید.



شکل (۹-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۶)

جواب: $s=-1\pm j1$

۹-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل، مفاهیم مرتبط با تابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی آن را بیان نمودیم و روش‌های محاسبه آنان را ارائه دادیم. به‌عنوان خلاصه و نتیجه‌گیری از مطالب این فصل، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- توابع شبکه در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، توابع گویایی هستند که صورت و مخرج آنان، بر حسب چند جمله ای‌های برحسب s به‌همراه ضرایب حقیقی بیان می‌شوند.
- ریشه‌های چند جمله‌ای صورت یک تابع شبکه، صفرهای آن تابع و به ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج تابع مذکور، قطب‌های آن تابع می‌گویند.

• مقدار s_1 را می‌توان فرکانس طبیعی متغیر $y(t)$ شبکه نامید، اگر و فقط اگر پاسخ ورودی صفر $y(t)$ برای حالت اولیه معینی، دارای جمله‌ای به‌صورت $k_1e^{s_1t}$ باشد.

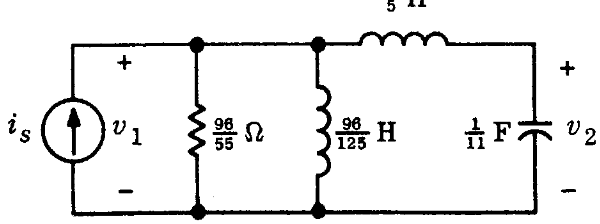
• اگر s_i فرکانس طبیعی ولتاژ و یا جریان عنصری از عناصر شبکه باشد آنگاه می‌توان گفت که این فرکانس طبیعی متغیر مذکور، فرکانس طبیعی شبکه موردنظر نیز می‌باشد.

• فرض کنید که **P(s)** ماتریس چند جمله‌ای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف کننده شبکه موردنظر باشد. حال کلیه ریشه‌های دترمینان این ماتریس، فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه موردنظر می‌باشند.

• هر فرکانس طبیعی یک شبکه، یک قطب یکی از توابع شبکه است. برای این منظور، شبکه بی تحریک را در نظر می‌گیریم. آنگاه اگر از منبع جریان نابسته‌ای که بین دو گره وصل شود، استفاده کنیم و امپدانس شبکه $Z(s)$ را از این دو گره ببینیم می‌توان نتیجه گرفت که قطب‌های این تابع شبکه $Z(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه است. همچنین اگر از منبع ولتاژ نابسته‌ای در یک نقطه بریده‌شده از شاخه شبکه موردنظر استفاده کنیم و ادمیتانس شبکه $Y(s)$ را از دو سر منبع ببینیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که قطب‌های تابع شبکه $Y(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

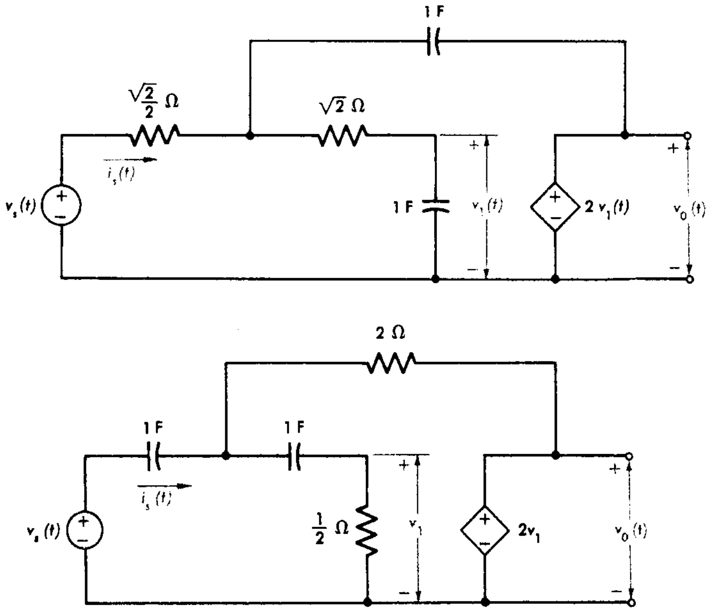
۹-۸- مسائل مروری

۱- شکل (۹-۱۸) یک مدار الکتریکی با ورودی منبع نابسته جریان i_s را نشان می‌دهد. در این مدار مطلوبست: الف) تعیین امپدانس نقطه تحریک $Z(s)={V_1(s)}/{I_s(s)}$ ؛ ب) امپدانس انتقال $H(s)={V_2(s)}/{I_s(s)}$ را محاسبه کنید.



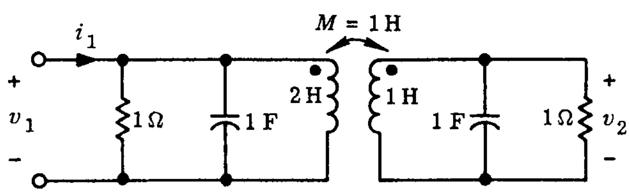
شکل (۹-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

۲- مدارهای ارائه‌شده در شکل (۹-۱۹)، اساس فیلترهای مدارهای مجتمع را نشان می‌دهد. در این مدارهای الکتریکی مطلوبست: الف) تابع انتقال ${V_o(s)}/{V_s(s)}$ ؛ ب) در صورتی که $v_s(t)=\cos u(t)$ باشد پاسخ $v_o(t)$ را بیابید.



شکل (۹-۱۹): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

۳- مدار معادل را در مدار تزویج‌شده شکل (۹-۲۰) بیابید. در این مدار: الف) امپدانس نقطه تحریک $V_1(s)/I_1(s)$ را تعیین کنید؛ ب) امپدانس انتقال $V_2(s)/I_1(s)$ را بیابید؛ ج) نسبت انتقال ولتاژ $V_2(s)/V_1(s)$ را مشخص کنید.

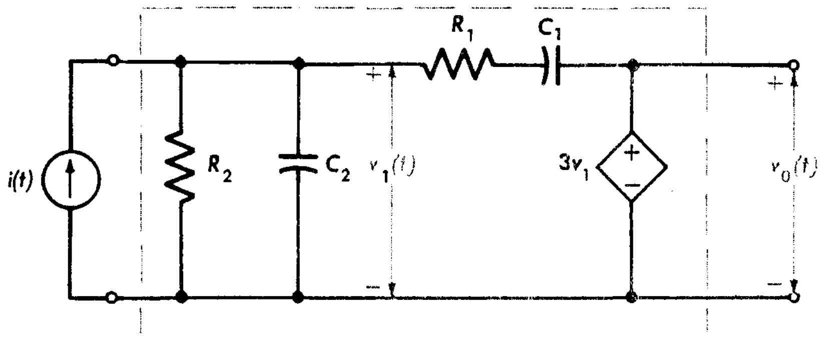


شکل (۹-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

۴- در مدارهای الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۹-۱۹)، امپدانس نقطه تحریک $V_s(s)/I_s(s)$ را بیابید.

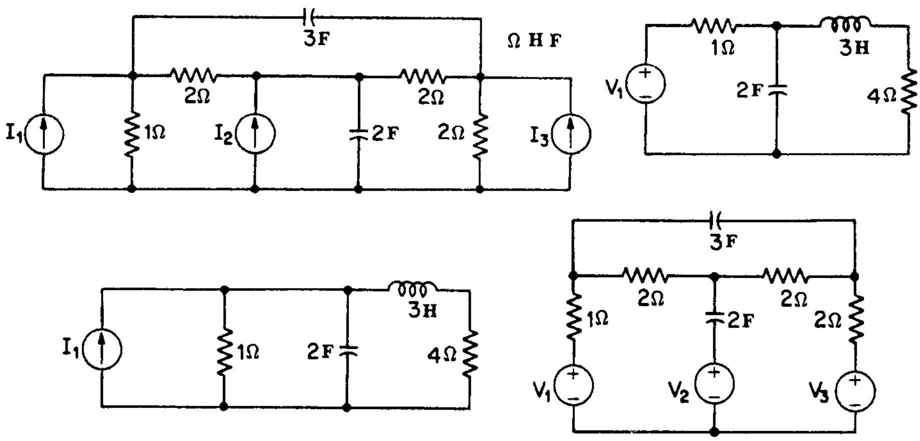
۵- قسمت محصور مدار الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۹-۲۱)، یک مدار نوسان ساز را نشان می‌دهد. در این مدار، مطلوبست: الف) تابع تبدیل $V_o(s)/I(s)$ ؛ ب) هر گاه $i(t)$

یک تابع پله واحد باشد و $R_۱ = R_۲ = ۱۰ \text{k}\Omega$ ، $C_۱ = C_۲ = ۱۰۰۰ \text{pF}$ ، و $A = ۳$ باشد آنگاه پاسخ $v_o(t)$ را بیابید.



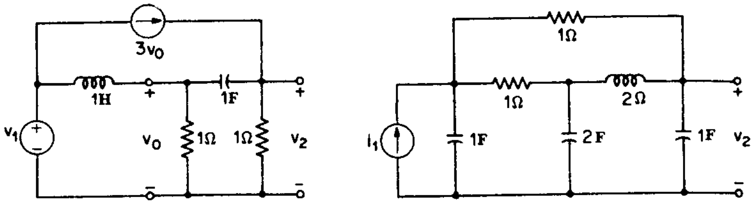
شکل (۹-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

۶- فرکانس‌های طبیعی را برای مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۹-۲۲) بیابید.



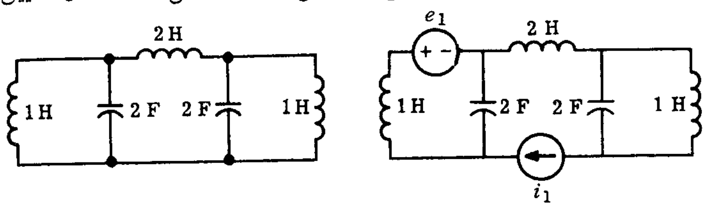
شکل (۹-۲۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

۷- معادلات دیفرانسیل انتگرال مدارهای ارائه‌شده در شکل (۹-۲۳) را با ورودی منابع نابسته و خروجی‌های مشخص‌شده $v_۲(t)$ بیابید. سپس معادلات مذکور را به حوزه فرکانس انتقال دهید.



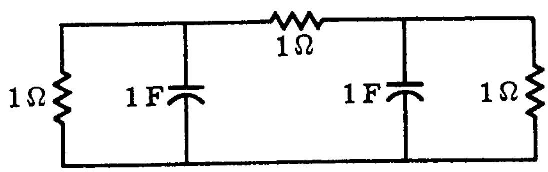
شکل (۹-۲۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

۸- فرکانس‌های طبیعی مدارهای الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۹-۲۴) را تعیین کنید.



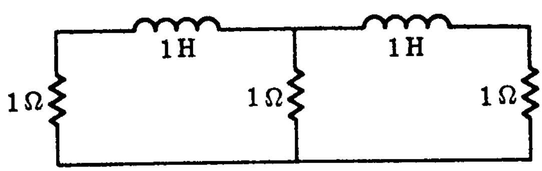
شکل (۹-۲۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- با استفاده از تابع شبکه و تزریق منبع جریان به شبکه ارائه‌شده در شکل (۹-۲۵)، فرکانس‌های طبیعی مدار را بیابید.



شکل (۹-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- با استفاده از تابع شبکه و تزریق منبع ولتاژ به شبکه ارائه‌شده در شکل (۹-۲۶)، فرکانس‌های طبیعی مدار را بیابید.



شکل (۹-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)