فصل هشتم

تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

۸-۱- مقدمه

در فصل‌های قبلی، روش‌های حل مدارهای الکتریکی را بیان نمودیم که براساس تشکیل معادلات شبکه استوار بود. در این روش‌ها یافتیم که اگر مدار به‌صورت مقاومتی به‌همراه منابع الکتریکی بود، معادلات به‌صورت جبری در می‌آمدند؛ اما اگر مدار مربوطه دارای عناصر سلف و خازن باشند (که معمولاً هم چنین است)، معادلات شبکه به‌صورت یک سری معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی در می‌آمد که حل این نوع مدارها را با مشکل مواجه می‌کرد. برا ی حل این‌گونه مدارها باید از روش‌های حل معادلات با مشتقات مرتبه بالا از قبیل روش تیلور، رانگ کوتا، و ... استفاده نمود. یکی از روش‌های مفید و مؤثر در حل مدارهای الکتریکی، روش تبدیل لاپلاس[1] می‌باشد که جزء ساده ترین، اساسی ترین، و پرکاربردترین این روش‌ها می‌باشد. البته این روش، فقط مناسب مدارهای الکتریکی با خصوصیات خطی تغییرناپذیربا زمان می‌باشد و در دیگر مدارها، تقریباً بی فایده خواهد بود. بدین منظور، در این فصل برآنیم تا خواص تبدیل لاپلاس و روش تبدیل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی را به معادلات جبری بیان نموده و نحوه استفاده از این ابزار را در حل مدارهای الکتریکی بیان نماییم.

---

[1]- Laplace Transformation

۸-۲- تعریف تبدیل لاپلاس

روش حل مدارهای الکتریکی با استفاده از تبدیل لاپلاس به این‌صورت است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده مدار موردنظر از حوزه زمان به حوزه فرکانس مختلط انتقال می‌یابد. با این انتقال، خواهیم دید که معادلات الکتریکی انتقال یافته به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند. تبدیل لاپلاس، یک انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس است. فرض کنید که تابع $f(t)$ که در حوزه زمان تعریف شده است را به حوزه فرکانس منتقل نماییم که آن را با $F(s)$ نمایش می‌دهیم. روش این تبدیل به این‌صورت است که ابتدا تابع $f(t)$ را در عبارت e^{-st} ضرب می‌کنیم و سپس از تابع به‌دست آمده در حوزه تعریف $f(t)$ که از زمان o^- تا ∞ است انتگرال می‌گیریم. به‌عبارت دیگر،

$$F(s) = £\left[f(t)\right] = \int_{o^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (۱-۸)$$

که در این رابطه $£\left[f(t)\right]$ یا $F(s)$، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$، و s متغیر فرکانس مختلط می‌باشد. البته شرط برقراری رابطه (۸-۱) آن است که انتگرال رابطه مذکور، همگرا باشد. معمولاً در سیستم‌های فیزیکی واقعی، به‌خاطر شرایط و محدودیت‌های عملی حاکم بر سیستم، شرط مذکور همیشه برقرار می‌باشد.

لازم به‌ذکر است که کران پایین انتگرال‌گیری، o^- می‌باشد و این به آن معنا است که شرایط تابع $f(t)$ از لحظه زمان اعمال آن، در انتگرال‌گیری موثر است. به‌عنوان مثال، اگر $f(t)$ به‌عنوان یک تابع ضربه در $t = o$ باشد، آنگاه کران پایین o^- باعث می‌شود که اثر این تابع ضربه در تبدیل لاپلاس آن ظاهر شود؛ به‌عبارت دیگر، انتگرال‌گیری، این ضربه را در بر خواهد داشت. همچنین معمولاً $f(t)$ را به‌ازای زمان‌های $t < o$ برابر صفر در نظر می‌گیریم که این مسئله با این واقعیت که رفتار سیستم از لحظه اعمال تحریک آغاز می‌شود، تطابق دارد.

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس در معادله (۸-۱)، تبدیل معکوس لاپلاس را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = £^{-1}\left[F(s)\right] \qquad (۲-۸)$$

که $£^{-1}$ عملگر تبدیل معکوس لاپلاس می‌باشد.

مثال (۸-۱): تبدیل لاپلاس تابع با $f_1(t)$ ضابطه زیر را بیابید:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq o \\ o & t < o \end{cases}$$

حل: تابع مذکور، همان تعریف تابع پله واحد $u(t)$ است. با استفاده از رابطه تبدیل لاپلاس (۸-۱) داریم:

$$F_1(s) = \int_{o^-}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{o}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$F_1(s) = \pounds\left[F_1(t)\right] = \pounds\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

مثال (۸-۲): تبدیل لاپلاس مشتق تابع $f(t)$ یعنی $\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ را بیابید.

حل: براساس تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{o}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

حال اگر از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کنیم قادر هستیم که این تبدیل لاپلاس را به‌دست آوریم. در روش جزء به جزء داشتیم که،

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

حال اگر فرض کنیم که،

$$u = e^{-st} \quad , \quad dv = df(t)$$

آنگاه،

$$v = f(t) \quad , \quad du = -se^{-st} dt$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{o^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{o^-}^{\infty} u.dv = f(t)e^{-t} \Big|_{o^-}^{\infty} - \int_{o^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

$$= -f(o^-) + s\int_{o^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

از آنجایی که $\int_{o^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ همان تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است، لذا می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(o^-) \qquad (۸-۳)$$

که $f(o^-)$ مقدار تابع $f(t)$ در زمان o^- می‌باشد.

تمرین (۸-۱): تبدیل لاپلاس تابع ضربه $f(t) = \delta(t)$ را بیابید.

جواب: $F(s) = 1$

۸-۳- خواص اساسی تبدیل لاپلاس

خواص اساسی ارائه‌شده در تبدیل لاپلاس، فقط برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان مطرح می‌شود.

۸-۳-۱- خاصیت یکتایی

خاصیت یکتایی تبدیل لاپلاس بدین معنی است که برای یک تابع $f(t)$ تنها یک تبدیل لاپلاس $F(s)$ خواهد داشت و برعکس، تنها یک تابع $f(t)$ در حوزه زمان وجود دارد که تبدیل لاپلاس آن برابر $F(s)$ می‌باشد. این خاصیت را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\pounds\left[f(t)\right]=F(s)\leftrightarrow \pounds^{-1}\left[F(s)\right]=f(t) \qquad (۸-۴)$$

۸-۳-۲- خاصیت خطی بودن

یکی از خواص مهم تبدیل لاپلاس، خاصیت خطی بودن آن است. بدین منظور، ابتدا خاصیت همگن بودن این تبدیل را بیان می‌کنیم. فرض کنید که تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $k\cdot f(t)$ (که k یک عدد حقیقی و دلخواه است) برابر است با:

$$\pounds\left[k\cdot f(t)\right]=\int_{o^-}^{\infty}k\cdot f(t)e^{-st}dt=k\int_{o^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=kF(s) \qquad (۸-۵)$$

حال با توجه به آنکه تبدیل لاپلاس، یک رابطه خطی است، آنگاه با استفاده از خاصیت جمع‌آثار براحتی می‌توان اثبات کرد که تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=f_۱(t)+f_۲(t)$ برابر $G(s)=F_۱(s)+F_۲(s)$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر،

$$\pounds\left[f_۱(t)+f_۲(t)\right]=\int_{o^-}^{\infty}\left[f_۱(t)+f_۲(t)\right]e^{-st}dt=$$

$$=\int_{o^-}^{\infty}f_۱(t)e^{-st}dt+\int_{o^-}^{\infty}f_۲(t)e^{-st}dt=F_۱(s)+F_۲(s) \qquad (۸-۶)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۸-۵) و (۸-۶)، می‌توان خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس را به‌شکل کامل زیر بیان نمود:

$$\pounds\left[\sum_{i=۱}^{n}a_i f_i(t)\right]=\sum_{i=۱}^{n}a_i F_i(s) \qquad (۸-۷)$$

مثال (۸-۳): در فصل‌های قبلی، رابطه ولتاژ و جریان یک خازن الکتریکی را به‌صورت زیر بیان نمودیم:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

که در این رابطه، C مقدار ثابت ظرفیت خازن است. حال فرض کنید که $I(s)$ و $V(s)$ تبدیل لاپلاس متغیرهای $i(t)$ و $v(t)$ باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

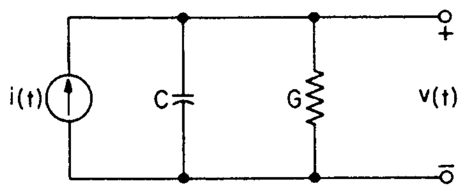
$$I(s) = £\left[i(t)\right] = \int_{o^-}^{\infty} i(t)e^{-st}dt$$

$$V(s) = £\left[v(t)\right] = \int_{o^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dt$$

آنگاه با استفاده از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع و خاصیت همگن بودن در تبدیل لاپلاس، رابطه $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ را می‌توان به‌شکل زیر بیان نمود:

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(o^-)\right] = sCV(s) - Cv(o^-)$$

مثال (۸-۴): در شکل (۸-۱) رابطه KCL را در حوزه فرکانس بیان نمایید.



شکل (۸-۱): مدار RC ساده

حل: رابطه KCL در مدار شکل (۸-۱) در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$

حال اگر از دو طرف رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$I(s) = C\left(sV(s) - v(o^-)\right) + \frac{V(s)}{R}$$

و در نتیجه،

$$I(s) = (sC + \frac{۱}{R})V(s) - Cv(o^-)$$

که در این رابطه، از خواص همگن بودن و خطی بودن تبدیل لاپلاس استفاده شده است.

۸-۳-۳- خاصیت مشتق‌گیری متوالی

در بخش قبل، تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع را بیان نمودیم. حال می‌خواهیم ببینیم که

تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه بالای یک تابع $f(t)$ به چه صورت خواهد بود. فرض کنید که $g(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$ باشد. در نتیجه،

$$\frac{d^{۲} f(t)}{dt^{۲}}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{df}{dt}=\frac{dg}{dt} \qquad (۸-۸)$$

آنگاه با استفاده از رابطه (۸-۳) تبدیل لاپلاس تابع $\dfrac{dg}{dt}$ برابر است با:

$$£\left[\frac{dg}{dt}\right]=s\,£\left[g(t)\right]-g(o^-) \qquad (۸-۹)$$

حال با توجه به آنکه $g(t)=\dfrac{df}{dt}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$£\left[\frac{d^{۲} f(t)}{dt^{۲}}\right]=s\,£\left[\frac{df}{dt}\right]-\frac{df}{dt}(o^-)$$

که $\dfrac{df(o^-)}{dt}$ مقدار تغییرات $f(t)$ در زمان $t=o^-$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (۸-۳)، رابطه اخیر به‌شکل زیر تغییر می‌کند:

$$£\left[\frac{d^{۲} f(t)}{dt^{۲}}\right]=s\left[sF(s)-f(o^-)\right]-\frac{df}{dt}(o^-)$$

و در نهایت داریم:

$$£\left[\frac{d^{۲} f(t)}{dt^{۲}}\right]=s^{۲}F(s)-sf(o^-)-\frac{df}{dt}(o^-) \qquad (۸-۱۰)$$

با گسترش رابطه (۸-۱۰) می‌توان به تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه n ام یک تابع $f(t)$ به‌صورت زیر اشاره نمود:

$$£\left[\frac{d^{n} f(t)}{dt^{n}}\right]=s^{n}F(s)-s^{n-۱}f(o^-)-s^{n-۲}\frac{df(o^-)}{dt}-\dots-\frac{d^{n-۱}}{dt^{n-۱}}f(o^-) \qquad (۸-۱۱)$$

مثال (۸-۵): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۲) مفروض می‌باشد. با فرض آنکه ورودی منبع ولتاژ به‌صورت تابع ضربه $e(t)=\delta(t)$ باشد، می‌خواهیم پاسخ ضربه جریان مدار $i(t)$ را بیابیم که به این پاسخ، $h(t)$ می‌نامیم. بدین منظور با توجه به آنکه $i(o^-)=h(o^-)=o$ می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$L\frac{dh(t)}{dt}+R.h(t)=\delta(t) \qquad ,\ h(o^-)=o$$

حال با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله اخیر به‌صورت زیر در می‌آید:

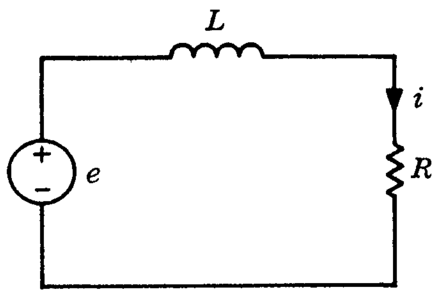
$$L\pounds\left[\frac{dh}{dt}\right]+R.\pounds\ [h]=\pounds\ [\delta(t)\ ]=۱$$

در نتیجه با بکار بردن قاعده مشتق‌گیری و شرط اولیه پاسخ ضربه خواهیم داشت:

$$(Ls+R)\pounds\ [h(t)]=۱$$

$$\pounds\ [h(t)]=\frac{۱}{Ls+R}=\frac{۱}{L}\cdot\frac{۱}{s+\frac{R}{L}}$$

$$h(t)=\frac{۱}{L}u(t).e^{-\frac{R}{L}t}\qquad t\geq o$$



شکل (۸-۲): مدار خطی RL تغییرناپذیر با زمان

۸-۳-۴- خاصیت انتگرال‌گیری

خاصیت انتگرال‌گیری، عکس مشتق‌گیری است. برای این منظور، فرض می‌کنیم که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $\int_{o^-}^{t}f(t')dt'$ را به‌دست آوریم. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[\int_{o^-}^{t}f(t')dt'\right]=\int_{o^-}^{\infty}\left[\int_{o^-}^{t}f(t')dt'\right]e^{-st}dt$$

برای این انتگرال‌گیری از خاصیت انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌شود. با این روش خواهیم داشت:

$$\pounds\left[\int_{o^-}^{t}f(t')dt'\right]=\left[\int_{o^-}^{t}f(t')dt'\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{o^-}^{\infty}-\int_{o^-}^{\infty}f(t)(-\tfrac{1}{s})e^{-st}dt$$

در رابطه اخیر، جمله اول برابر صفر می‌باشد؛ زیرا مقدار انتگرال مذکور برای $t=o^-$ برابر صفر است. در نهایت داریم:

$$\pounds\left[\int_{o^-}^{t}f(t')dt'\right]=\frac{۱}{s}\int_{o^-}^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt=\frac{۱}{s}\pounds\left[f(t)\right]\qquad(۱۲-۸)$$

مثال (۸-۶): در فصول قبلی بیان نمودیم که رابطه بین ولتاژ و جریان یک خازن به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

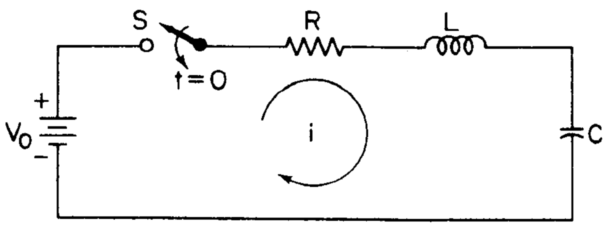
$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{o^-}^{t} i(\tau)d\tau+v(o^-)$$

حال می‌خواهیم این رابطه را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به حوزه فرکانس منتقل نماییم. طرف راست رابطه اخیر از یک قسمت انتگرالی و یک جمله ثابت $v(o^-)$ تشکیل شده است. جمله ثابت $v(o^-)$ که همان ولتاژ اولیه خازن است، از زمان $t=o^-$ آغاز شده و تا آخر هم وجود دارد. به‌عبارت دیگر، به‌صورت یک تابع پله با دامنه $v(o^-)$ عمل می‌کند. در نتیجه، با استفاده از رابطه (۸-۱۲) خواهیم داشت:

$$\mathrm{V(s)}=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v(o^-)}{s}$$

که $V(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $v(t)$ و $I(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $i(t)$ می‌باشد.

مثال (۸-۷): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۳) اگر در لحظه $t=o$ کلید s بسته شود، با اعمال ورودی منبع ولتاژ به‌صورت $V_o u(t)$ ، رابطه KVL را در حوزه فرکانس به‌دست آورید.



شکل (۸-۳): مدار RLC سری

حل: ابتدا معادله KVL را برای حلقه مدار می‌نویسیم:

$$V_o.u(t)=R.i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{o^-}^{t} i(\tau)d\tau+v_C(o^-)$$

با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس در مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{V_o}{s}=(R+sL+\frac{1}{sC})I(s)+\frac{V_C(o^-)}{s}-L.i(o^-)$$

مثال (۸-۸): با استفاده از روابط $\int_{o^-}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$ و $\pounds\left[\delta(t)\right]=1$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\pounds\ [u(t)] = \frac{1}{s}$$

تمرین (۸-۲): با استفاده از $k+1$ انتگرال‌گیری متوالی از تابع پله واحد، اثبات کنید که،

$$\int_{o^-}^{t} \frac{t'^k}{k!} dt' = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$ برای k صحیح

و سپس با تبدیل لاپلاس از این انتگرال‌گیری‌ها به این نتیجه برسید که،

$$\pounds \left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}$$ برای n صحیح

۸-۴- تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی

در این بخش برآنیم که تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی متداول در حل مدارهای الکتریکی را مورد بررسی قرار داده و خواص آنها را بیان نماییم. در بخش‌های قبلی بیان نمودیم که تبدیل لاپلاس توابع پله و ضربه به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\pounds\ [u(t)] = \frac{1}{s} \qquad (۸-۱۳)$$

$$\pounds\ [\delta(t)] = 1 \qquad (۸-۱۴)$$

- تابع ضربه $\delta(t\text{-}t_o)$

به عنوان مثال دیگر، می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع ضربه واحد $\delta(t\text{-}t_o)$ را به‌دست آوریم. بدین منظور داریم:

$$\pounds[\delta(t\text{-}t_o)] = \int_o^\infty e^{-st}\delta(t\text{-}t_o)dt = e^{-st_o} \qquad (۸-۱۵)$$

این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که تابع ضربه $\delta(t\text{-}t_o)$ فقط در $t = t_o$ غیر صفر است و در بقیه زمان‌ها دارای مقدار صفر می‌باشد.

- تابع نمایی $e^{-at}u(t)$

با فرض آنکه ضریب a مقدار مثبتی باشد آنگاه تبدیل لاپلاس $e^{-at}u(t)$ را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

$$\pounds\left[e^{-at}u(t)\right] = \int_{o^-}^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_{o^-}^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{o^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \qquad (۸-۱۶)$$

البته رابطه فوق به ازاء $a < o$ نیز صادق می‌باشد. همچنین اگر $a = o$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن برابر تبدیل لاپلاس $u(t)$ است که در رابطه (۸-۱۳) آورده شده است.

- تابع نمایی $e^{j\omega t}u(t)$

مشابه حالت قبل، می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[e^{j\omega t}u(t)\right] = \int_{o^-}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-st}dt = \int_{o^-}^{\infty} e^{-(s-j\omega)t}dt = \frac{۱}{s-j\omega} \qquad (۸\text{-}۱۷)$$

و به‌طور مشابه، تبدیل لاپلاس تابع $e^{-j\omega t}u(t)$ برابر است با:

$$\pounds\left[e^{-j\omega t}u(t)\right] = \frac{۱}{s+j\omega} \qquad (۸\text{-}۱۸)$$

- تابع نمایی $\sin\omega t u(t)$ **و** $\cos\omega t u(t)$

از مبحث ریاضیات پایه می‌دانیم که براساس قاعده اولر[1] توابع سینوسی و کسینوسی را می‌توان به‌صورت نمایی زیر بیان نمود:

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{۲}$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{۲j}$$

حال با استفاده از روابط (۸-۱۷) و (۸-۱۸) تبدیل لاپلاس توابع سینوسی و کسینوسی قابل محاسبه می‌باشد که،

$$\pounds\left[\cos\omega t.u(t)\right] = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{s-j\omega}+\frac{۱}{s+j\omega}\right] = \frac{s}{s^۲+\omega^۲} \qquad (۸\text{-}۱۹)$$

$$\pounds\left[\sin\omega t.u(t)\right] = \frac{۱}{۲j}\left[\frac{۱}{s-j\omega}-\frac{۱}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^۲+\omega^۲} \qquad (۸\text{-}۲۰)$$

این روابط را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق توابع که به‌صورت

$$\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(o^-)$$

نیز به‌دست آورد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[\frac{d}{dt}(\sin\omega t.u(t))\right] = s\,\pounds\left[\sin\omega t.u(t)\right] - \sin\omega t.u(t)\Big|_{t=o^-} = s\frac{\omega}{s^۲+\omega^۲} - o = \frac{s\omega}{s^۲+\omega^۲}$$

اما با توجه به آنکه مشتق $\sin\omega t.u(t)$ برابر $\omega\cos\omega t.u(t)$ است، لذا خواهیم داشت:

[1]- Euler's Identity

$$£\left[\omega \cos \omega t . u(t)\right]=\frac{s \omega}{s^{۲}+\omega^{۲}}$$

و در نهایت،

$$£\left[\cos \omega t . u(t)\right]=\frac{s}{s^{۲}+\omega^{۲}}$$

که می‌بینیم با استفاده از رابطه (۸-۲۰) و خاصیت مشتق‌گیری در تبدیل لاپلاس، توانستیم تبدیل لاپلاس ارائه‌شده در رابطه (۸-۱۹) را به اثبات رسانیم.

- **تابع شیب** $ktu(t)$

برای اینکه بتوانیم تبدیل لاپلاس تابع شیب[1] $kt.u(t)$ را به‌دست آوریم از رابطه تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم که،

$$£\left[kt.u(t)\right]=\int_{o^-}^{\infty} kt.e^{-st}dt=\frac{k}{s^{۲}} \qquad (۸-۲۱)$$

این رابطه تبدیل لاپلاس را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع به‌دست آورد. همچنین انتگرال بالا را می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء نیز حل نمود.

- **تابع** $\int_o^t f(t)dt$

برای یافتن تبدیل لاپلاس یک تابع انتگرالی $\int_o^t f(t)dt$ از رابطه تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$£\left[\int_o^t f(t)dt\right]=\int_o^{\infty} e^{-st}\left[\int_o^t f(t)dt\right]dt$$

حال از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌شود تا بتوان انتگرال فوق را به‌دست آورد. بدین منظور فرض کنید که،

$$u=\int_o^t f(t)dt \quad , \quad dv=e^{-st}dt$$

$$du=f(t)dt \quad , \quad v=\frac{-۱}{s}e^{-st}$$

در نتیجه،

$$£\left[\int_o^t f(t)dt\right]=\left\{\frac{-۱}{s}e^{-st}\int_o^t f(t)dt\right\}\Big|_o^{\infty}+\frac{۱}{s}F(s)$$

که جمله اول در سمت راست معادله به ازای کرانه‌های بالا و پایین، برابر صفر می‌باشد. لذا در نهایت داریم:

[1]- Ramp Function

$$\pounds\left[\int_o^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (۲۲-۸)$$

حال با استفاده از این رابطه و با در نظر گرفتن آنکه تبدیل لاپلاس تابع $u(t)$ برابر $\frac{1}{s}$ است، لذا رابطه (۸-۲۱) را می‌توان به‌راحتی با استفاده از رابطه (۸-۲۲) به‌دست آورد.

پس مشتق‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را در s ضرب کنیم و بر عکس، انتگرال‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را به s تقسیم کنیم.

- **تابع** $e^{-at}f(t)$

با فرض آنکه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at}f(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\pounds\left[e^{-at}f(t)\right] = \int_o^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_o^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt$$

رابطه اخیر شبیه به رابطه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است؛ با این تفاوت که به‌جای اپراتور s، عملگر $s+a$ جایگزین شده است. پس،

$$\pounds\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a) \qquad (۲۳-۸)$$

یعنی اگر تابع $f(t)$ در جمله e^{-at} ضرب شود، تبدیل لاپلاس تابع حاصل، برابر انتقال یافته تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به‌اندازه a (یعنی $F(s+a)$) است.

در نتیجه، با استفاده از این خاصیت، به‌راحتی می‌توان رابطه (۸-۱۶) را به‌دست آورد؛ یعنی با توجه به آنکه $\pounds\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$ می‌باشد، لذا،

$$\pounds\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{s+a}$$

- **انتقال زمان یک تابع**

تاکنون در مورد تبدیل لاپلاس توابع زمانی بحث کردیم که از لحظه $t=o$ شروع می‌شوند. حال می‌خواهیم ببینیم اگر تابعی از زمان $t=a$ آغاز شود، تبدیل لاپلاس تابع مذکور، چه تغییری می‌کند. بدین منظور فرض کنید که $\pounds\left[f(t)\right] = F(s)$ باشد. حال می‌خواهیم ببینیم تبدیل لاپلاس $f(t-a)u(t-a)$ (با $a>o$) چگونه است؟؛ به‌عبارت دیگر، چه ارتباطی با $F(s)$ دارد. بدین منظور از تابع $f(t-a)u(t-a)$ به‌شکل زیر، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\pounds\left[f(t-a)u(t-a)\right] = \int_o^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt = \int_{a^-}^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

حال اگر تغییر متغیر $\tau = t - a$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\pounds\left[f(t-a)u(t-a)\right] = \int_o^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s)$$

در نتیجه،

$$\pounds\left[f(t-a)u(t-a)\right] = e^{-as} F(s) \qquad (۲۴-۸)$$

پس نتیجه می‌گیریم که اگر یک تابع زمانی $f(t)$ به‌مقدار a ثانیه، تأخیر یابد، آنگاه تابع لاپلاس $F(s)$ آن در جمله e^{-as} ضرب می‌شود. مثلاً تبدیل لاپلاس تابع $u(t-۴)$ برابر $\frac{۱}{s} e^{-۴s}$ می‌باشد.

- توابع متناوب $f(t)$

فرض کنید که یک تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T وجود دارد که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس آن را به‌دست آوریم. شکل کلی یک تابع متناوب را می‌توان در شکل (۸-۴) مشاهده نمود. حال اگر تابع موردنظر در دوره تناوب اول را به‌صورت $f_۱(t)$ بیان کنیم، آنگاه تابع $f(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

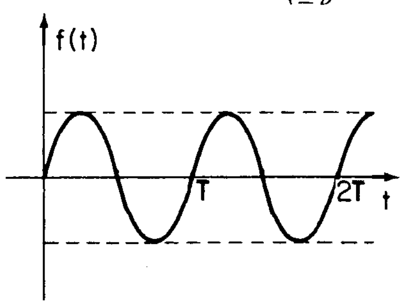
$$f(t) = f_۱(t) + f_۱(t-T)u(t-T) + f_۱(t-۲T)u(t-۲T) + \ldots \qquad (۲۵-۸)$$

که $f_۱(t)$ تابع در سیکل اول، $f_۱(t-T)u(t-T)$ تابع در سیکل دوم و .... می‌باشد. حال با استفاده از رابطه (۸-۲۴) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در رابطه (۸-۲۵) به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$F(s) = \pounds\left[f(t)\right] = F_۱(s)\left[۱ + e^{-Ts} + e^{-۲Ts} + \ldots\right]$$

با توجه به آنکه جملات داخل کروشه، بسط تابع $\frac{۱}{۱-e^{-Ts}}$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\pounds\left[f(t)\right] = F(s) = \frac{F_۱(s)}{۱-e^{-Ts}} \qquad (۲۶-۸)$$



شکل (۸-۴): شکل موج یک تابع متناوب

- مشتق‌گیری از تابع لاپلاس $F(s)$

در این قسمت می‌خواهیم بدانیم، در صورتی که از تابع $F(s)$ برحسب s مشتق بگیریم، چه تغییری در تابع حوزه زمانی آن یعنی $f(t)$ صورت می‌گیرد. بدین منظور داریم:

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_o^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_o^{\infty}e^{-st}[-tf(t)]dt$$

پس نتیجه می‌گیریم که،

$$\pounds[t.f(t)]=-\frac{d}{ds}F(s) \qquad (۲۷-۸)$$

با استفاده از همین خاصیت مشتق‌گیری از تابع لاپلاس $F(s)$ به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که،

$$\pounds\left[t^n u(t)\right]=\frac{n!}{s^{n+۱}} \qquad (۲۸-۸)$$

لازم به‌ذکر است که برای به‌دست آوردن این رابطه می‌توانیم از رابطه $\pounds[t.u(t)]=\frac{۱}{s^۲}$ و معادله (۸-۲۷) استفاده کنیم.

- انتگرال‌گیری از تابع $F(s)$

مثل حالت قبل می‌خواهیم بدانیم در صورتی که از تابع $F(s)$ با متغیر s ، انتگرال‌گیری کنیم تابع $f(t)$ آن چه تغییری می‌کند. باز می‌توان اثبات نمود که،

$$\int_s^{\infty}F(s)ds=\pounds\left[\frac{f(t)}{t}\right] \qquad (۲۹-۸)$$

- تبدیل لاپلاس $f(at)$

در صورتی که $F(s)=\pounds[f(t)]$ باشد آنگاه،

$$\pounds[f(at)]=\int_o^{\infty}e^{-st}f(at)dt$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $\tau=at$ داریم:

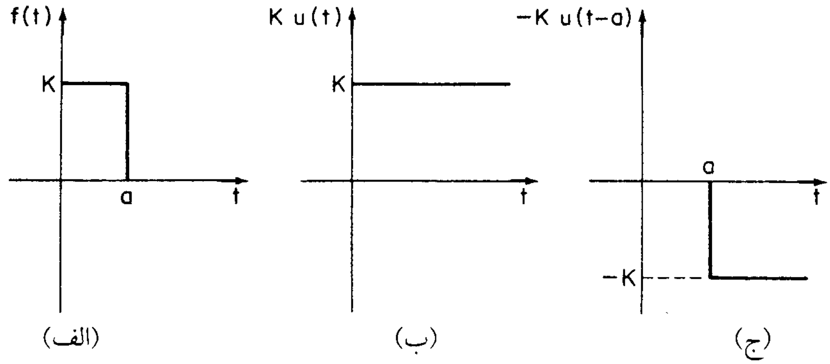
$$\pounds[f(at)]=\frac{۱}{a}\int_o^{\infty}e^{\frac{-s}{a}\tau}f(\tau)d\tau$$

در نتیجه،

$$\pounds[f(at)]=\frac{۱}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad (۳۰-۸)$$

حال برای درک بهتر این موارد، مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

مثال (۸-۹): تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را در شکل (۸-۵- الف) بیابید.



شکل (۸-۵): شکل موج یک تابع پالس

حل: برای این منظور، تابع ارائه‌شده در شکل (۸-۵- الف) را می‌توان از مجموع دو تابع ارائه‌شده در شکل‌های (۸-۵- ب و ج) به‌دست آورد. یعنی،

$$f(t)=k\left[u(t)-u(t-a)\right]$$

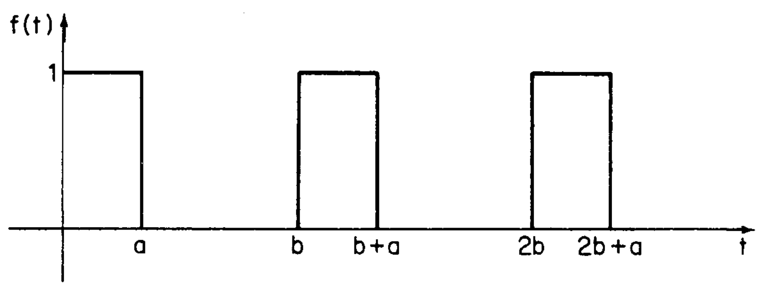
حال با استفاده از تبدیل لاپلاس $u(t)$ و با کمک رابطه (۸-۲۴)، تبدیل لاپلاس تابع فوق به‌راحتی قابل محاسبه است:

$$\pounds\left[k.u(t)\right]=\frac{k}{s}\quad,\quad \pounds\left[-ku(t-a)\right]=-\frac{k}{s}e^{-as}$$

در نتیجه،

$$\pounds\left[f(t)\right]=\frac{k}{s}(1-e^{-as})$$

مثال (۸-۱۰): تابع لاپلاس تابع متناوب ارائه‌شده در شکل (۸-۶) را بیابید.



شکل (۸-۶): تابع متناوب مربوط به مثال (۸-۱۰)

حل: برای به‌دست آوردن تبدیل لاپلاس توابع متناوب از رابطه (۸-۲۶) استفاده می‌کنیم. در مثال قبل، تبدیل لاپلاس تابع $f_1(t)$ که یک تابع پالس است را به‌دست آوردیم که دامنه آن به‌مقدار k بود. لذا در این مثال، تبدیل لاپلاس $f_1(t)$ برابر است با:

$$F_1(s)=\frac{1-e^{-as}}{s}$$

حال با توجه به آنکه دوره تناوب تابع $f(t)$ در شکل (۸-۶) برابر b می‌باشد، لذا با توجه به رابطه (۸-۲۶) می‌توان نوشت:

$$\pounds\left[f(t)\right]=F(s)=\frac{1-e^{-as}}{s(1-e^{-bs})}$$

مثال (۸-۱۱): تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\sin\omega_o t.u(t)}{t}u(t)$ را بیابید.

حل: قبلاً محاسبه نمودیم که،

$$\pounds\left[\sin\omega_o t.u(t)\right]=\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$$

حال با استفاده از رابطه (۸-۲۹) خواهیم داشت:

$$\pounds\left[\frac{\sin\omega_o t.u(t)}{t}\right]=\int_s^\infty\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}ds=\tan^{-1}\frac{s}{\omega_o}\bigg|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\omega_o}$$

مثال (۸-۱۲): تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cos 100\pi.tu(t)$ را بیابید.

حل: قبلاً محاسبه نمودیم که،

$$\pounds\left[\cos t\cdot u(t)\right]=\frac{s}{s^2+1}$$

حال با استفاده از رابطه (۸-۳۰) با فرض آنکه $a=100\pi$ می‌باشد، داریم:

$$\pounds\left[\cos 100\pi t\cdot u(t)\right]=\frac{1}{100\pi}\cdot\frac{\frac{s}{100\pi}}{\left(\frac{s}{100\pi}\right)^2+1}=\frac{s}{s^2+(100\pi)^2}$$

برای جمع بندی مطالب ارائه‌شده در این بخش، فهرستی از تبدیل لاپلاس بعضی توابع مرسوم در مدارهای الکتریکی در جدول (۸-۱) ارائه شده است. همچنین خواص اساسی ارائه‌شده در تبدیل لاپلاس را می‌توان در جدول (۸-۲) مشاهده نمود.

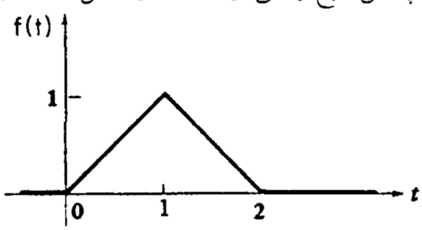
جدول (۸-۱): تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مرسوم

$f(t)$	$F(s)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$K.f(t)$	$K.F(s)$
$\frac{d}{dt}f(t)$	$s.F(s)-f(o^-)$
$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2.F(s)-s.f(o^-)-\frac{df}{dt}(o^-)$
$\frac{d^3}{dt^3}f(t)$	$s^3.F(s)-s^2.f(o^-)-s.\frac{df}{dt}(o^-)-\frac{d^2f}{dt^2}(o^-)$
$g(t)=\int_o^t f(\tau)d\tau+g(o^-)$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{g(o^-)}{s}$
$u(t-a)$	$e^{-a.s}/s$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-a.s}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\lim_{t\to o} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} s.F(s)$
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to o} s.F(s)$

تمرین (۸-۳): تبدیل لاپلاس توابع te^{-at} و $e^{-at}\cos\omega_o t$ را بیابید.

جواب: بترتیب $\frac{1}{(s+a)^2}$ ، $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$

تمرین (۸-۴): تبدیل لاپلاس تابع زمانی ارائه‌شده در شکل(۸-۷) را بیابید.



شکل (۸-۷): تابع زمانی مربوط به تمرین (۸-۴)

جواب: $\pounds\left[f(t)\right]=\frac{۱}{s^{۲}}(۱-۲e^{-s}+e^{-۲s})$

جدول (۸-۲): خواص اساسی تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	۱
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$u(t)$	$\frac{۱}{s}$
t	$\frac{۱}{s^{۲}}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+۱}}$
$e^{-a.t} \quad a>o$	$\frac{۱}{(s+a)}$
$te^{-a.t} \quad a>o$	$\frac{۱}{(s+a)^{۲}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s.\sin\theta+\omega.\cos\theta}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s.\cos\theta-\omega.\sin\theta}{s^{۲}+\omega^{۲}}$
$e^{-a.t}\sin\omega t \quad a>o$	$\frac{\omega}{(s+a)^{۲}+\omega^{۲}}$
$e^{-a.t}\cos\omega t \quad a>o$	$\frac{s+a}{(s+a)^{۲}+\omega^{۲}}$
$e^{-a.t}\sin(\omega t+\theta) \quad a>o$	$\frac{(s+a)\sin\theta+\omega.\cos\theta}{(s+a)^{۲}+\omega^{۲}}$
$e^{-a.t}\cos(\omega t+\theta) \quad a>o$	$\frac{(s+a)\cos\theta-\omega.\sin\theta}{(s+a)^{۲}+\omega^{۲}}$
$۲\lvert K\rvert e^{-a.t}\cos(\omega t+\angle K) \quad a>o$	$\frac{K}{s+a-j\omega}+\frac{K^*}{s+a+j\omega}$

۸-۵- تبدیل لاپلاس معکوس توابع پیچیده

در بیشتر مسائل مدارهای الکتریکی، تابع‌هایی که تبدیل معکوس آنها پاسخ حوزه زمانی را به‌دست می‌دهد، اغلب از جفت تبدیل‌های آورده شده در جداول (۸-۱) و (۸-۲) پیچیده‌تر هستند. لذا برای استفاده از خواص این جداول، می‌بایست یک رشته عملیات جبری بر روی $F(s)$ انجام شود تا بتوان تابع زمانی $f(t)$ آن را به‌دست آورد. روشی که اغلب برای تجزیه هر تابع $F(s)$ به تابع‌هایی ساده به‌کار می‌رود، تجزیه به کسرهای ساده است.

برای تجزیه توابع گویا به جزءهای ساده، یک روش کلی و عمومی وجود دارد که به گسترش به‌صورت کسرهای جزیی[1] معروف است. برای این منظور، تابع گویای $F(s)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(s)=\frac{C(s)}{B(s)}=\frac{c_o s^m + c_1 s^{m-1}+\ldots+c_m}{b_o s^n + b_1 s^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad (۳۱-۸)$$

که $C(s)$ و $B(s)$ چند جمله‌ای‌هایی برحسب متغیر s بوده و ضرایب c_o تا c_m و b_o تا b_n اعداد حقیقی می‌باشند. همچنین z_i تعداد صفرهای تابع $F(s)$ می‌باشد که ریشه‌های معادله $C(s)$ می‌باشد و p_j تعداد قطب‌های تابع $F(s)$ است که ریشه‌های معادله $B(s)$ است.

اولین مرحله در گسترش تابع $F(s)$ به‌صورت کسرهای جزیی، نوشتن این تابع به‌صورت مناسب[2] می‌باشد؛ به این معنی که درجه چند جمله‌ای صورت، باید از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچک‌تر باشد. برای این منظور، مناسب است تا با تقسیم صورت بر مخرج، بتوان تابع $F(s)$ را به‌صورت زیر به‌شکل مناسب در آورد:

$$F(s)=\frac{C(s)}{B(s)}=g_1+g_2 s+g_3 s^2+\ldots+g_{k+1}s^k+\frac{A(s)}{B(s)} \qquad (۳۲-۸)$$

که فرض شده است درجه صورت به‌مقدار k از درجه مخرج، بزرگ‌تر است. با این کار، درجه چند جمله‌ای $A(s)$ از درجه چند جمله‌ای $B(s)$ کم‌تر می‌شود. لذا تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۸-۳۲) به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

---
[1]- Partial Fraction Expansion
[2]- Proper

$$f(t) = \pounds^{-1}[F(s)] = g_1\delta(t) + g_2\delta^{(1)}(t) + \ldots + g_{k+1}\delta^{(k)}(t) + \pounds^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] \quad (۸\text{-}۳۳)$$

حال کافی است تبدیل لاپلاس معکوس تابع چند جمله‌ای $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به‌دست آوریم که خاصیت این تابع گویا، آن است که درجه چند جمله‌ای صورت از مخرج، کوچک‌تر است. برای این منظور، تابع $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به‌صورت کسرهای جزیی در می‌آوریم. در اینجا سه حالت وجود دارد و آن، به این‌صورت است که قطب‌های چند جمله‌ای $B(s)$ می‌تواند به‌صورت قطب‌های ساده، قطب‌های مکرر، و یا قطب‌های مختلط باشد که در ادامه به این سه نوع قطب و روش‌های تجزیه هر کدام اشاره می‌شود.

حالت اول: قطب‌های ساده:

در صورتی که ریشه‌های معادله $B(s)$ به‌صورت ساده و غیر تکراری باشد، آنگاه تابع $\frac{A(s)}{B(s)}$ را می‌توان به‌شکل ساده زیر و به‌صورت کسرهای جزیی تقسیم بندی نمود:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{k_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i} \quad (۸\text{-}۳۴)$$

که ضرایب k_1 تا k_n را می‌توان با مخرج مشترک چند جمله ای‌های سمت راست و معادل قرار دادن صورت توابع سمت چپ و راست به‌دست آورد. آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس هر جمله به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\pounds^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] = k_1e^{p_1t} + k_2e^{p_2t} + \cdots + k_ne^{p_nt} = \sum_{i=1}^{n}k_ie^{p_it} \quad (۸\text{-}۳۵)$$

مثال (۸-۱۳): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

حل: می‌دانیم که قطب‌های تابع $F_1(s)$ برابر $p_1 = -1$ و $p_2 = -2$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} = \frac{k_1(s+2) + k_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

با تساوی قرار دادن چند جمله‌ای صورت معادله اخیر، با صورت تابع $F_1(s)$ داریم:

$$3s + 5 = k_1(s+2) + k_2(s+1)$$

یعنی،

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ 2k_1 + k_2 = 5 \end{cases}$$

در نتیجه، $k_1 = ۲$ و $k_2 = ۱$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{۳s+۵}{s^۲+۳s+۲} = \frac{۲}{s+۱} + \frac{۱}{s+۲}$$

آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس $F_1(s)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \pounds^{-1}\left[F_1(s)\right] = (۲e^{-t} + e^{-۲t})u(t)$$

در این مثال ساده، روش تجزیه کسرها نشان داده شده است ولی اگر تعداد قطب‌های چند جمله‌ای مخرج، زیاد باشد، دیگر این روش کارساز نیست. راه ساده و مناسبی که برای به‌دست آوردن ضرایب k_i در رابطه (۸-۳۴) وجود دارد این است که از رابطه زیر استفاده شود:

$$k_i = (s - p_i)F_1(s)\Big|_{s=p_i} \qquad (۸\text{-}۳۶)$$

مثال (۸-۱۴): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F_1(s) = \frac{۶s^۲ + ۲۵s + ۲۳}{s^۳ + ۶s^۲ + ۱۱s + ۶} = \frac{۶s^۲ + ۲۵s + ۲۳}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+۱} + \frac{k_2}{s+۲} + \frac{k_3}{s+۳}$$

حال با استفاده از رابطه (۸-۳۶) می‌توان نوشت:

$$k_1 = (s+۱)\frac{۶s^۲ + ۲۵s + ۲۳}{s^۳ + ۶s^۲ + ۱۱s + ۶}\Bigg|_{s=-۱} = ۲$$

$$k_2 = ۳ \quad , \quad k_3 = ۱$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{۲}{s+۱} + \frac{۳}{s+۲} + \frac{۱}{s+۳}$$

و با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از جملات سمت راست رابطه اخیر، تابع زمانی آن محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \pounds^{-1}\left[F_1(s)\right] = \left[۲e^{-t} + ۳e^{-۲t} + e^{-۳t}\right]u(t)$$

حالت دوم: قطب‌های مکرر

فرض کنید که تابع $F_1(s)$ دارای یک قطب تکراری p_o با رتبه n و m قطب مجزای دیگر باشد که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{(s-p_o)^n \prod_{i=1}^{m}(s-p_i)} \tag{۳۷-۸}$$

حال اگر بخواهیم این تابع را برحسب کسرهای جزیی بیان کنیم خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{k_{o1}}{(s-p_o)} + \frac{k_{o2}}{(s-p_o)^2} + \dots + \frac{k_{on}}{(s-p_o)^n} + \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_m}{s-p_m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{oi}}{(s-p_o)^i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{(s-p_i)} \tag{۳۸-۸}$$

که تبدیل لاپلاس تک تک جملات سمت راست رابطه اخیر برابر است با:

$$f_1(t) = \pounds^{-1}[F_1(s)] = k_{o1}e^{p_o t} + k_{o2}te^{p_o t} + \dots + \frac{k_{on}t^{n-1}e^{p_o t}}{(n-1)!} + k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_m e^{p_m t}$$

$$= e^{p_o t}\sum_{i=1}^{n} \frac{k_{oi}t^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{m} k_i e^{p_i t} \tag{۳۹-۸}$$

حال برای محاسبه k_i از همان رابطه (۸-۳۶) استفاده می‌شود ولی برای محاسبه ضرایب k_{oi} با استفاده از خواص مشتق‌گیری از تابع لاپلاس از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$k_{o,n} = \frac{1}{o!}(s-p_o)^n F_1(s)\Big|_{s=p_o}$$

$$k_{o,n-1} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-p_o)^n F_1(s)\right]\Big|_{s=p_o} \tag{۴۰-۸}$$

$$k_{o,n-i} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left[(s-p_o)^n F_1(s)\right]\Big|_{s=p_o}$$

مثال (۸-۱۵): تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F_1(s)$ زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{4s^2+11s+9}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{4s^2+11s+9}{(s+1)^2(s+2)}$$

حل: مشخص است که چند جمله‌ای مخرج، دارای یک ریشه $p_o = -۱$ از مرتبه ۲ و یک ریشه $p_۱ = -۲$ از مرتبه اول است. پس،

$$F_۱(s) = \frac{k_{o۱}}{s+۱} + \frac{k_{o۲}}{(s+۱)^۲} + \frac{k_۱}{s+۲}$$

حال برای به‌دست آوردن هر یک از ضرایب، با استفاده از روابط (۸-۳۶) و (۸-۴۰) آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$k_۱ = (s+۲)\cdot \left.\frac{۴s^۲ + ۱۱s + ۹}{(s+۱)^۲(s+۲)}\right|_{s=-۲} = ۳$$

$$k_{o۱} = (s+۱)^۲ F_۱(s)\Big|_{s=-۱} = \left.\frac{۴s^۲ + ۱۱s + ۹}{s+۲}\right|_{s=-۱} = ۲$$

$$k_{o۲} = \frac{d}{ds}\left[(s+۱)^۲ F_۱(s)\right]\Big|_{s=-۱} = \frac{d}{ds}\left[\frac{۴s^۲ + ۱۱s + ۹}{s+۲}\right]\Bigg|_{s=-۱} = ۱$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_۱(s) = \frac{۱}{s+۱} + \frac{۲}{(s+۱)^۲} + \frac{۳}{s+۲}$$

و در نهایت، تابع زمانی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_۱(t) = \pounds^{-۱}\left[F_۱(s)\right] = \left[e^{-t} + ۲te^{-t} + ۳e^{-۲t}\right]u(t)$$

حالت سوم: قطب‌های مختلط

در صورتی که قطب‌های مختلط در چند جمله‌ای مخرج $F_۱(s)$ موجود باشد می‌توان از روش ارائه‌شده در حالت دوم نیز استفاده نمود؛ ولی با توجه به خاصیت قطب‌های مختلف، امکان ساده سازی کسرهای جزیی مربوط به قطب‌های مختلط، بیشتر می‌باشد. برای این منظور، فرض کنید که چند جمله‌ای مخرج $F_۱(s)$ دارای یک قطب مختلط p_o و p_o^* باشد (علامت * به‌معنای مزدوج p_o است). آنگاه می‌توان نوشت:

$$F_۱(s) = \frac{A(s)}{(s-p_o)(s-p_o^*)Q(s)} \qquad (۸-۴۱)$$

که با روش تجزیه کسرها، رابطه اخیر را می‌توان به رابطه زیر تبدیل نمود:

$$F_۱(s) = \frac{k_۱}{(s-p_o)} + \frac{k_۲}{(s-p_o^*)} + \frac{R(s)}{Q(s)} \qquad (۸-۴۲)$$

که $\frac{R(s)}{Q(s)}$ تابع تجزیه کسرها برای دیگر قطب‌های تابع $F_۱(s)$ است. حال با استفاده از رابطه (۸-۳۶) مقادیر $k_۱$ و $k_۲$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} k_۱ &= (s-p_o)F_۱(s)\Big|_{s=p_o} \\ k_۲ &= (s-p_o^*)F_۱(s)\Big|_{s=p_o^*} \end{aligned} \qquad (۸\text{-}۴۳)$$

از روابط (۸-۴۳) در می‌یابیم که $k_۲$ مزدوج مختلط $k_۱$ است یعنی،

$$k_۲ = k_۱^* = k_r - jk_i \quad , \quad p_o^* = \sigma_o - j\omega_o$$

لذا دو جمله اول کسرهای جزیی ارائه‌شده در سمت راست رابطه (۸-۴۲) را می‌توان با یکدیگر ترکیب نموده و رابطه مذکور را به شکل زیر خلاصه نمود:

$$F_۱(s) = \frac{۲k_r s - ۲k_r\sigma_o - ۲k_i\omega_o}{(s-\sigma_o)^۲ + \omega_o^۲} + \frac{R(s)}{Q(s)} \qquad (۸\text{-}۴۴)$$

مثال (۸-۱۶): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$F_۱(s) = \frac{s^۲ + ۳s + ۷}{\left[(s+۲)^۲ + ۴\right](s+۱)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$F_۱(s) = \frac{k_۱}{s-(-۲+j۲)} + \frac{k_۱^*}{s-(-۲-j۲)} + \frac{k_۲}{s+۱}$$

حال با بکار بردن روابط (۸-۴۳) می‌توان نوشت:

$$k_۱ = (s+۲-j۲)F(s)\Big|_{s=-۲+j۲} = \frac{s^۲+۳s+۷}{(s+۲+j۲)(s+۱)}\Bigg|_{s=-۲+j۲} = \frac{۱}{۴}j = \frac{۱}{۴}e^{j۹۰}$$

$$k_۲ = (s+۱)F_۱(s)\Big|_{s=-۱} = ۱$$

در نتیجه، با استفاده از رابطه (۸-۴۴) خواهیم داشت:

$$F_۱(s) = \frac{-۲\times\frac{۱}{۴}\times۲}{(s+۲)^۲+۴} + \frac{۱}{(s+۱)}$$

در نهایت، تابع زمانی $f_۱(t)$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f_۱(t) = \frac{۱}{۲}e^{-۲t}\sin ۲t + e^{-t} \quad t \geq o \quad \text{برای}$$

تمرین (۸-۵): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$F_۱(s) = \frac{۴s^۲ + ۷s + ۱۳}{(s^۲+۲s+۵)(s+۲)}$$

جواب: $f_1(t) = \left[e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t + 3e^{-2t}\right]u(t)$

۸-۶- کاربردهای اولیه از تبدیل لاپلاس

در این بخش، برآنیم تا کاربردهای اولیه‌ای از تبدیل لاپلاس را بیان نماییم. در فصل‌های آینده، کاربردهای اساسی دیگری از تبدیل لاپلاس را ارائه می‌کنیم.

۸-۶-۱- مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس

برای یک سلف با اندوکتانس L و جریان اولیه $i(o^-)$ ، رابطه زیر، بین ولتاژ با جریان آن در حوزه زمان برقرار است:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad , \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + i_L(o^-)$$

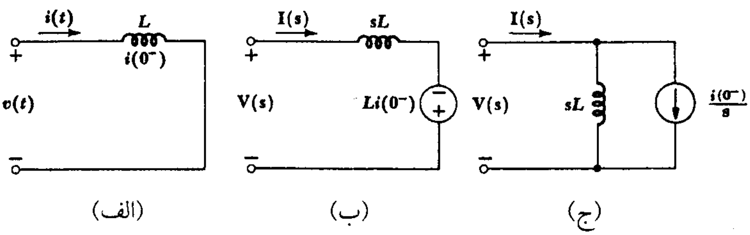
حال اگر این رابطه را به حوزه فرکانس انتقال نماییم (تبدیل لاپلاس بگیریم)، خواهیم داشت:

$$V_L(s) = sL.I(s) - Li(o^-) \qquad (۸-۴۵)$$

و یا،

$$I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(o^-)}{s} \qquad (۸-۴۶)$$

رابطه (۸-۴۵) به هنگام کاربرد قانون KVL و رابطه (۸-۴۶) به هنگام کاربرد قانون KCL قابل استفاده می‌باشد. شکل (۸-۸) مدل یک سلف را در حوزه زمان و فرکانس نشان می‌دهد.



شکل (۸-۸): مدل یک سلف القایی در: الف) حوزه زمان؛ ب و ج) حوزه فرکانس

همین موضوع را می‌توان برای یک خازن با ظرفیت خازنی C و ولتاژ اولیه $v(o^-)$ ارائه داد. رابطه ولتاژ–جریان هر خازن در حوزه زمان برابر است با:

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \quad , \quad v(t) = \frac{1}{C}\int_{\infty}^{t} i_C(t)dt + v_C(o^-)$$

حال با انتقال رابطه اخیر به حوزه فرکانس می‌توان نوشت:

$$I(s) = Cs.V(s) - Cv(o^-) \qquad (۴۷\text{-}۸)$$

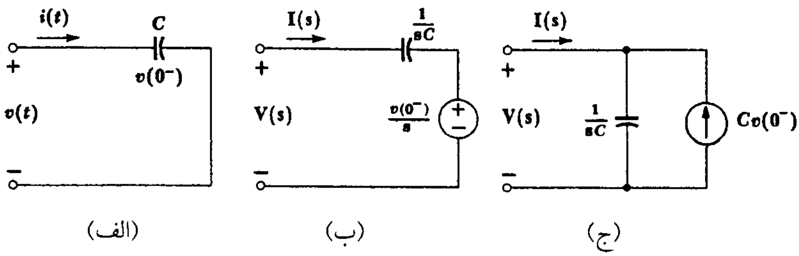
و یا،

$$V(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v(o^-)}{s} \qquad (۴۸\text{-}۸)$$

دو معادله (۸-۴۷) و (۸-۴۸) بترتیب برای کاربرد در قوانین KCL و KVL مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل (۸-۹) مدل یک خازن در حوزه زمان و فرکانس آورده شده است. همچنین از روابط (۸-۴۵) و (۸-۴۸) در می‌یابیم که اگر ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف، برابر صفر باشند آنگاه امپدانس سلف و خازن در حوزه فرکانس به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_L(s) = sL$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} \qquad (۴۹\text{-}۸)$$



شکل (۸-۹): مدل یک خازن در: الف) حوزه زمان؛ ب و ج) حوزه فرکانس

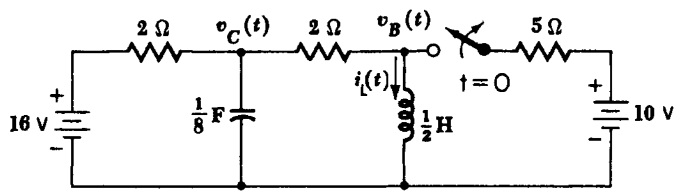
۸-۶-۲- پاسخ حالت کامل مدارهای الکتریکی

حل مسائل مدارهای الکتریکی به روش تبدیل لاپلاس، در واقع، تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را انجام می‌دهد. در این روش، معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند که بالطبع، حل آنان بسیار ساده‌تر خواهد بود. بعلاوه، روش تبدیل لاپلاس نسبت به روش حوزه زمانی، دارای دو مزیت دیگر است: اول آنکه در روش تبدیل لاپلاس، پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر به‌صورت یک جا و در عین حال، متمایز به‌دست می‌آیند. دوم آنکه در روش تبدیل لاپلاس، شرایط اولیه در حل

مسئله به‌طور مستقیم وارد می‌شود. لذا در این روش، مشتق‌های مرتبه بالا در حل مسئله وجود ندارد.

در حل مدارهای الکتریکی خطی با استفاده از تبدیل لاپلاس، دو روش جداگانه وجود دارد. در روش اول، معادلات دیفرانسیل مدار نوشته شده و سپس تک تک جملات را با استفاده از تبدیل لاپلاس به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم. در این روش، به‌طور خودکار، جملاتی به‌وجود می‌آید که شرایط اولیه مدار در آنها وجود دارد. در این حالت، پس از جایگزینی شرایط اولیه، خروجی تبدیل شده برحسب متغیر s به‌دست می‌آید و سپس با تبدیل معکوس، پاسخ در حوزه زمان تعیین می‌شود. در روش دوم با استفاده از روش ارائه‌شده در بخش (۸-۶-۱)، مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس در مدار جایگزین می‌شوند و سپس معادلات مدار را براساس قوانین KVL یا KCL می‌نویسیم. در این روش، چون در مدار معادل سلف و خازن، شرایط اولیه وارد می‌شود، لذا می‌توان به‌راحتی مسئله را با وجود شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها حل نمود.

مثال (۸-۱۷): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۰) فرض می‌شود که در لحظه $t=o$ ، کلید مدار، باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن $v_C(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



شکل (۸-۱۰): مدار الکتریکی موردنظر برای مثال (۸-۱۷)

حل: این مدار را از دو روش موردنظر حل می‌کنیم.

روش اول: ابتدا براساس روش KCL، پس از باز شدن کلید مدار، معادلات در حوزه زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}\left[v_C(t)-۱۶\right]+\frac{۱}{۸}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{۱}{۲}\left[v_C(t)-v_B(t)\right]=o \\ \frac{۱}{۲}\left[v_B(t)-v_C(t)\right]+۲\int v_B(t)dt=o \end{cases}$$

حال دو معادله اخیر را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم. لذا با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}V_C(s)-\frac{۸}{s}+\frac{۱}{۸}\left[sV_C(s)-v_C(o^-)\right]+\frac{۱}{۲}\left[V_C(s)-V_B(s)\right]=o \\ \frac{۱}{۲}\left[V_B(s)-V_C(s)\right]+۲\frac{V_B(s)}{s}+\frac{i_L(o^-)}{s}=o \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن شرایط اولیه سلف و خازن در مدار شکل (۸-۱۰) می‌دانیم که پس از گذشت زمان طولانی، سلف به‌صورت اتصال کوتاه و خازن به‌صورت مدار باز در می‌آید. لذا،

$$i_L(o^+)=i_L(o^-)=\frac{۱۶}{۴}+\frac{۱۰}{۵}=۶\text{A}$$

$$v_C(o^+)=v_C(o^-)=\frac{۱۶}{۴}\times ۲=۸\text{V}$$

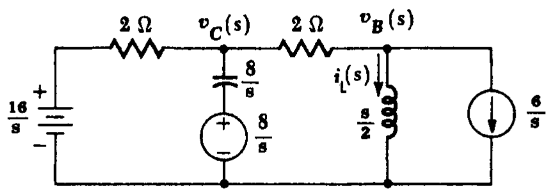
همچنین با جایگزینی مقادیر $i_L(o^-)$ و $v_c(o^-)$ وحذف $V_B(s)$ از دسته معادلات فوق خواهیم داشت:

$$V_C(s)=\frac{۸(s^۲+۶s+۳۲)}{s(s^۲+۸s+۳۲)}$$

اکنون با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس می‌توان نوشت:

$$v_C(t)=\pounds^{-۱}\left[V_C(s)\right]=۸-۴e^{-۴t}\sin ۴t \qquad t>o$$

روش دوم: در این روش، ابتدا مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۰) را در حوزه فرکانس رسم می‌کنیم که این مدار در شکل (۸-۱۱) رسم شده است.



شکل (۸-۱۱): مدار الکتریکی شکل (۸-۱۰) در حوزه فرکانس (پس از باز شدن کلید)

حال معادلات KCL را برای دو گره مدار شکل (۸-۱۱) می‌نویسیم که خواهیم داشت:

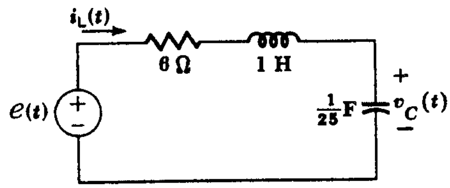
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}\left[V_C(s)-\frac{۱۶}{s}\right]+\frac{s}{۸}\left[V_C(s)-\frac{۸}{s}\right]+\frac{۱}{۲}\left[V_C(s)-V_B(s)\right]=o \\ \frac{v_B(s)}{s/۲}+\frac{۶}{s}+\frac{۱}{۲}\left[V_B(s)-V_C(s)\right]=o \end{cases}$$

در نتیجه با حذف متغیر $V_B(s)$ ، متغیر $V_C(s)$ به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$V_C(s) = \frac{۸(s^۲ + ۶s + ۳۲)}{s(s^۲ + ۸s + ۳۲)}$$

که مشابه معادلات در روش اول است.

مثال (۸-۱۸): در مدار شکل (۸-۱۲) با فرض $v_c(o^-) = ۱V$ و $i_L(o^-) = ۵A$ ، و ورودی $e(t) = ۱۲\sin ۵t$ ، جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۸-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۸-۱۸)

حل: معادله دیفرانسیل مدار موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + \frac{۱}{c}\int_{o^-}^{t} i(t)dt + v_c(o^-) = e(t)$$

حال اگر از رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس گرفته و مقادیر ارائه شده در مثال را جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{L}{s}(s^۲ + \frac{R}{L}s + \frac{۱}{LC})I(s) = E(s) + Li_L(o^-) - \frac{v_C(o^-)}{s}$$

$$I(s) = \frac{s}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}E(s) + \frac{۵s - ۱}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}$$

که جمله اول در سمت راست معادله اخیر، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، و جمله دوم، بیانگر تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است. حال با توجه به آنکه،

$$E(s) = \pounds\left[۱۲\sin ۵t\right] = \frac{۶۰}{s^۲ + ۵^۲}$$

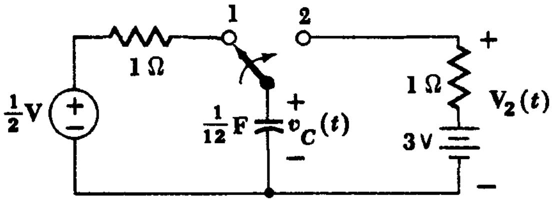
است، لذا خواهیم داشت:

$$I(s) = \frac{s}{\left[(s+۳)^۲ + ۴^۲\right].(s^۲ + ۵^۲)} + \frac{۵s - ۱}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}$$

اکنون با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس برای رابطه اخیر می‌توان نوشت:

$$i(t) = ۵e^{-۳t}\cos ۴t - ۶/۵e^{-۳t}\sin ۴t + ۲\sin ۵t \qquad t \geq o$$

تمرین (۸-۶): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۳) فرض می‌شود که کلید مدار به‌مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و به‌طور ناگهانی و در زمان $t=o$ ، در وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. ولتاژ $v_o(t)$ را برای زمان $t \geq o$ محاسبه نمایید.



شکل (۸-۱۳): مدار مربوط به مثال (۸-۶)

جواب: $v_o(t) = ۳ - \frac{۵}{۲} e^{-۱۲t}$, $v_c(o^+) = \frac{۱}{۲}\text{V}$

۸-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

هدف از ارائه این فصل آن بود که با بیان روش تبدیل لاپلاس و مشخص نمودن خصوصیات کاربردی آن، ابزار مفیدی برای حل مدارهای الکتریکی در اختیار خوانندگان گذاشته شود. خلاصه این مطالب را می‌توان به‌صورت زیر اشاره نمود:

- خواص اساسی تبدیل لاپلاس و ارائه تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مهم در جداول (۸-۱) و (۸-۲) ارائه شده است. با استفاده از روابط مشخص شده در جداول، می‌توان توابع زمانی پیچیده‌ای را به حوزه فرکانس منتقل نموده و یا بالعکس، تبدیل لاپلاس معکوس انجام داد.
- با استفاده از ابزار تبدیل لاپلاس، به‌راحتی می‌توان پاسخ حالت صفر، پاسخ ورودی صفر و پاسخ کامل یک مدار الکتریکی را به‌طور مستقیم محاسبه نمود. البته در محاسبه پاسخ کامل یک مدار، روند حل مسئله با استفاده از تبدیل لاپلاس به‌گونه‌ای است که مستقیماً می‌توان به این پاسخ دسترسی پیدا کرد. به‌عبارت دیگر، در یک حل مستقیم، پاسخ حالت صفر و ورودی صفر بطور یکجا محاسبه می‌شود.
- به‌منظور تعیین تابع زمانی یک تابع در حوزه فرکانس، می‌توان از روش تجزیه به کسرهای جزیی استفاده نمود که حالت‌های مختلف آن در بخش (۸-۵) آورده شده است.
- یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس، مدل سازی سلف و خازن در حوزه فرکانس و حل مدارهای الکتریکی است که به‌طور ابتدایی و مقدماتی، این مبحث در بخش (۸-۶)

آورده شده است. در فصل‌های آتی، کاربردهای مفصل‌تری از تبدیل لاپلاس آورده شده است.

۸-۸- مسائل مروری

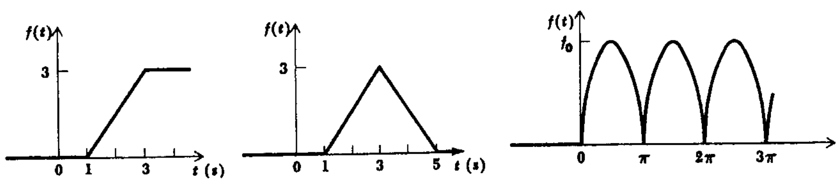
۱- تبدیل لاپلاس توابع زمانی زیر را بیابید.

$$f(t)=5u(t-5) \qquad f(t)=2e^{\sin t}\delta(t)$$

$$f(t)=t.u(t-2) \qquad f(t)=\sin^{3} 4t.u(t)$$

$$f(t)=t^{3}2e^{-2t}u(t)$$

۲- تبدیل لاپلاس توابع نشان داده در شکل (۸-۱۴) را بیابید.



شکل (۸-۱۴): توابع زمانی مربوط به سؤال (۲)

۳- تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید:

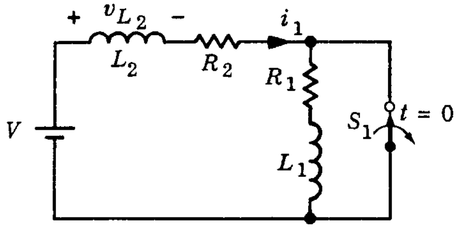
$$F(s)=\frac{2}{s^{2}(s+3)} \qquad F(s)=\frac{10s^{2}}{s^{2}+5s+4}$$

$$F(s)=\frac{e^{-3s-3}}{s+1} \qquad F(s)=\frac{3s^{3}+2s^{2}+s+1}{(s^{2}+2s+2)^{2}}$$

$$F(s)=\frac{s^{4}+1}{(s+1)^{3}}$$

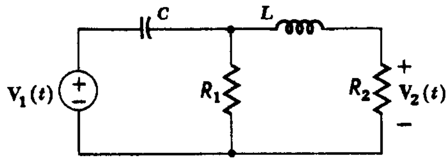
۴- با توجه به آنکه $\sinh at=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ و $\cosh at=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ می‌باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس توابع $\sinh at$ و $\cosh at$ را بیابید.

۵- مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۵) مفروض است. فرض کنید که کلید $S1$ به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ ، کلید باز می‌شود. حال اگر $V=2\text{V}$ ، $L_1=L_2=1\text{H}$ ، $R_1=R_2=1\Omega$ باشد آنگاه $i_1(t)$ و $v_{L2}(t)$ را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بیابید.



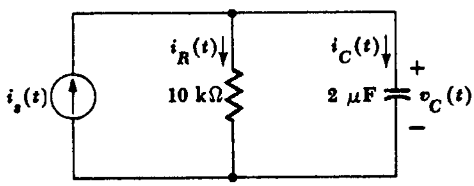
شکل (۸-۱۵): مدار مربوط به سؤال (۵)

۶- در مدار ارائه‌شده در شکل (۸-۱۶) پاسخ ورودی پله را برای $v_2(t)$ در حالتی که $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ، و $L = 1\text{H}$ و $C = 1\text{F}$ باشد، بیابید.



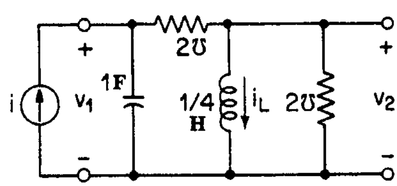
شکل (۸-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

۷- در مدار ارائه‌شده در شکل (۸-۱۷) پاسخ ورودی ضربه واحد را برای $v_C(t)$ ، $i(t)$ ، و $i_R(t)$ بیابید.



شکل (۸-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

۸- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۸)، در صورتی که ورودی $i(t)$ به‌مقدار $i(t) = 2e^{-t}u(t)$ آمپر باشد، آنگاه با استفاده از تبدیل لاپلاس، ولتاژ $v_2(t)$ را بیابید. فرض کنید که تمام شرایط اولیه، صفر است.

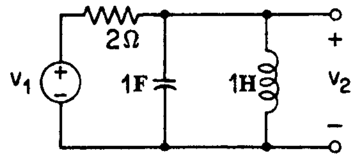


شکل (۸-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- در مدار ارائه در شکل (۸-۱۹)، در صورتی که ورودی $v_1(t)$ در حالت‌های مختلف زیر باشد، مقدار $v_2(t)$ را بیابید. فرض کنید که شرایط اولیه مدار به‌مقدار صفر است.

الف) $v_1(t) = \sin t.u(t)$

ب) $v_1(t) = \sin 2t.u(t)$



شکل (۸-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- سؤال (۹) را با وجود شرایط اولیه $i_L(o^-) = 2A$ و $v_C(o^-) = 1V$ دوباره حل کنید.