فصل ششم

مدارهای الکتریکی مرتبه دوم

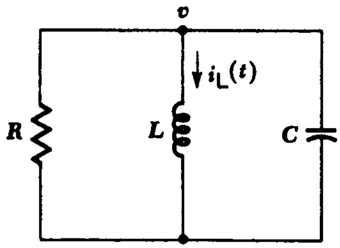
۶-۱- مقدمه

در فصل قبلی، مدارهای خطی مرتبه اول را که به‌صورت مدارهای الکتریکی RL یا RC بودند مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم. در این نوع مدارها، پاسخ کامل را از مجموع دو پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر به‌دست آوردیم. پاسخ حالت صفر، مربوطه به مدار مرتبه اولی بود که عناصر سلف‌ها یا خازن‌های مدار، فاقد شرایط اولیه می‌باشند. همچنین پاسخ ورودی صفر را در ارتباط با پاسخ سیستم در عدم وجود منابع الکتریکی ورودی داشتیم. اکنون در این فصل می‌خواهیم مدارهای خطی مرتبه دوم را مطالعه کنیم. در تحلیل این‌گونه مدارها نیز مشابه فصل پنجم، از پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر استفاده می‌کنیم. برای این منظور از یک مدار ساده RLC در حالت سری و یا موازی کمک می‌گیریم و پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر آنها را به دست آورده و با جمع نمودن آنها پاسخ کامل مدار را تعیین می‌کنیم. البته در فصل‌های بعدی، روش‌های ساده‌تری بر مبنای پاسخ فرکانسی ارائه می‌گردد که ما را در حل هر چه بهتر و راحت‌تر این‌گونه مدارها کمک خواهد کرد.

۶-۲- پاسخ ورودی صفر- تحریک با شرایط اولیه

در این بخش می‌خواهیم پاسخ ورودی صفر مدارهای مرتبه دوم ساده را مورد بررسی قرار دهیم. در این مدارهای ساده، از یک مقاومت، سلف و خازن استفاده می‌شود که در دو

حالت سری و موازی در نظر می‌گیریم. بدین منظور یک مدار RLC موازی مطابق با شکل (۶-۱) در نظر بگیرید که بدون منبع الکتریکی ورودی بوده و دارای حالات اولیه‌ای به‌صورت ولتاژ اولیه خازن $v_C(o)$ و جریان اولیه سلف $i_L(o)$ می‌باشد.



شکل (۶-۱): مدار RLC موازی بدون منبع ورودی

در فصول دوم و چهارم، روابط اساسی برای عناصر مقاومت، سلف و خازن را به‌صورت زیر بیان نمودیم:

$$v_R(t) = R.i_R(t) \quad , \quad i_R(t) = {v_R(t)}/{R} \qquad (۶-۱)$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad , \quad i_L(t) = I_o + \frac{1}{L}\int_o^t v_L(\tau)d\tau \qquad (۶-۲)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad , \quad v_C(t) = V_o + \frac{1}{C}\int_o^t i_C(\tau)d\tau \qquad (۶-۳)$$

از طرف دیگر با کاربرد قوانین KVL و KCL در شکل (۶-۱) خواهیم داشت:

$$v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) = v(t) \qquad (۶-۴)$$

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = o \qquad (۶-۵)$$

با استفاده از روابط (۶-۱) تا (۶-۴) در معادله (۶-۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{v_C(t)}{R} + I_o + \frac{1}{L}\int_o^t v_C(\tau)d\tau + C\frac{dv_C(t)}{dt} = o \qquad (۶-۶)$$

حال اگر از رابطه اخیر نسبت به زمان مشتق بگیریم به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دست خواهیم یافت:

$$C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}v_C(t) = o \qquad (۶-۷)$$

که شرایط اولیه این رابطه به‌صورت زیر است:

$$v_C(o) = V \quad , \quad i_L(o) = I_o$$

از حل معادله (۶-۷) می‌توان ولتاژ دو سر خازن را به‌دست آورد و پس از آن، دیگر متغیرهای مدار محاسبه می‌شود. راه حل دیگر مدار موردنظر آن است که جریان سلف

$i_L(t)$ را به‌عنوان متغیر اصلی انتخاب نماییم. بدین منظور با استفاده از روابط (۶-۱) تا (۶-۴) در رابطه (۶-۵) به معادله دیفرانسیل جریانی زیر می‌رسیم:

$$\frac{v_L(t)}{R}+i_L(t)+C\frac{dv_L(t)}{dt}=o$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)+CL\frac{d^{۲}i_L(t)}{dt^{۲}}=o$$

$$\frac{d^{۲}i_L(t)}{dt^{۲}}+\frac{۱}{RC}\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{۱}{LC}i_L(t)=o \qquad (۶-۸)$$

که شرایط اولیه معادله دیفرانسیل اخیر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$i_L(o)=I_o \quad , \quad \frac{di_L(o)}{dt}=\frac{v_L(o)}{L}=\frac{v_C(o)}{L} \qquad (۶-۹)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۶-۸) فرض کنید که جواب آن به‌صورت $i_L(t)=K.e^{s.t}$ باشد. با جایگذاری این مقدار در معادله (۶-۸) خواهیم داشت:

$$s^{۲}\times K.e^{s.t}+\frac{۱}{RC}s\times K.e^{s.t}+\frac{۱}{LC}K.e^{s.t}=o$$

$$\left(s^{۲}+\frac{۱}{RC}s+\frac{۱}{LC}\right)K.e^{s.t}=o \qquad (۶-۱۰)$$

که در این معادله، برای برقراری تساوی، یا باید چندجمله‌ای $s^{۲}+\frac{۱}{RC}s+\frac{۱}{LC}$ برابر صفر باشد و یا $K.e^{s.t}$ صفر گردد. جمله $K.e^{s.t}$ مخالف صفر است؛ زیرا در غیر این‌صورت جریان $i_L(t)$ صفر می‌شود که امکان‌پذیر نیست. پس نتیجه می‌گیریم که:

$$s^{۲}+\frac{۱}{RC}s+\frac{۱}{LC}=o \qquad (۶-۱۱)$$

به معادله (۶-۱۱) معادله مشخصه[۱] مدار، و به چندجمله‌ای سمت چپ این معادله، چند جمله‌ای مشخصه[۲] می‌گویند. با تعیین ریشه‌های $s_۱$ و $s_۲$ این چند جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} s_۱=\dfrac{-۱}{۲RC}+\sqrt{\left(\dfrac{۱}{۲RC}\right)^{۲}-\dfrac{۱}{LC}} \\ s_۲=\dfrac{-۱}{۲RC}-\sqrt{\left(\dfrac{۱}{۲RC}\right)^{۲}-\dfrac{۱}{LC}} \end{cases} \qquad (۶-۱۲)$$

1- Characteristic Equation

2- Characteristic Polynominal

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر R ، L و C بستگی دارد که به چهار حالت میرایی شدید[1]، میرایی بحرانی[2]، میرایی ضعیف[3] و بی‌اتلاف[4] تقسیم می‌شود که نوع جواب پاسخ مدار به‌صورتهای زیر خواهد بود:

الف) میرایی شدید: در این حالت $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ خواهد بود؛ به‌عبارت دیگر، جمله زیر رادیکال در ریشه‌های معادله مشخصه، دارای مقدار مثبتی خواهد بود. لذا مقادیر s_1 و s_2 به‌صورت اعداد حقیقی منفی در می‌آیند و در نتیجه، پاسخ معادله (۶-۸) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 . t} + K_2 e^{s_2 . t} \qquad (۶-۱۳)$$

که K_1 و K_2 با شرایط اولیه ارائه‌شده در روابط (۶-۹) به‌دست می‌آید.

ب) میرایی بحرانی: این وضعیت هنگامی‌رخ می‌دهد که $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ باشد. یعنی جمله زیر رادیکال، برابر صفر گردد. در نتیجه $s_1 = s_2 = s = \frac{-1}{2RC}$ خواهد بود و پاسخ مدار برابر است با،

$$i_L(t) = \left(K + K'.t\right).e^{s.t} \qquad (۶-۱۴)$$

ج) میرایی ضعیف: در این وضعیت $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ است و در نتیجه ریشه‌های معادله مشخصه s_1 و s_2 به‌صورت اعداد مختلط مزدوج در می‌آیند و لذا،

$$i_L(t) = K e^{-\alpha . t} \cos(\omega_o t + \theta) \qquad (۶-۱۵)$$

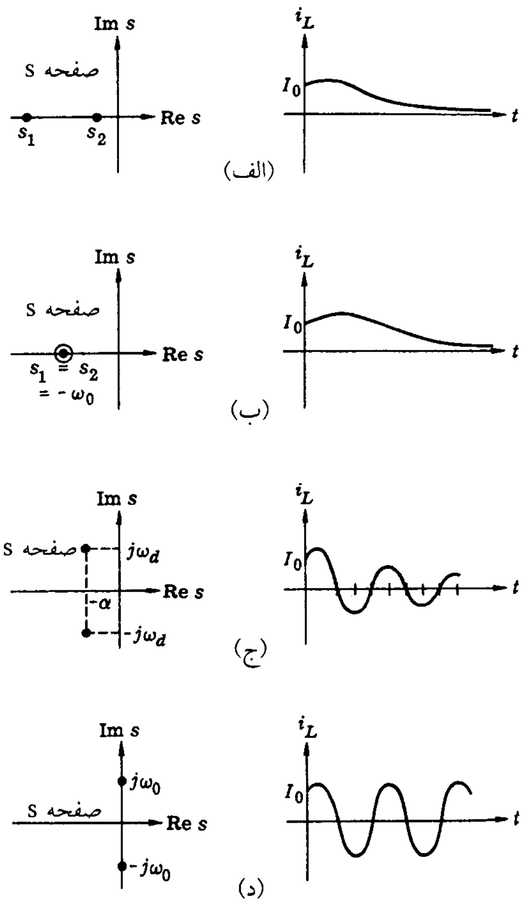
که در این رابطه $\alpha = {}^{1}\!/_{2RC}$ و $\omega_o = {}^{1}\!/\sqrt{LC}$ خواهد بود. ضرایب K و θ هم مقادیر ثابتی بوده که از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

د) بی‌اتلاف: در این حالت فرض می‌شود که مقدار $R = \infty$ باشد. در نتیجه $s_1 = j\,{}^{1}\!/\sqrt{LC}$ و $s_2 = -j\,{}^{1}\!/\sqrt{LC}$ خواهد بود و در نهایت، پاسخ معادله دیفرانسیل (۶-۸) برابر خواهد بود با:

---
[1]- Over Damped
[2]- Critically Damped
[3]- Under Damped
[4]- Lossless

$$i_L(t) = K\cos(\omega_o t + \theta) \qquad (۱۶-۶)$$

برای درک بهتر نحوه تغییرات شکل موج جریان $i_L(t)$ بر اساس مکان ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه، می‌توان به شکل (۶-۲) مراجعه نمود که صفحات مختلط سمت چپ این شکل، صفحه فرکانس مختلط [1] می‌گویند. در حالت (الف)، دو ریشه معادله مشخصه به‌صورت اعداد حقیقی منفی بوده و میرایی شدید می‌باشد؛ در حالی‌که در شکل (ب) هر دو ریشه به‌صورت عدد حقیقی منفی و مساوی هم بوده و میرایی بحرانی را تشکیل می‌دهد. دو حالت (ج) و (د) هم وضعیت ریشه‌های معادله مشخصه را در حالت میرایی ضعیف و بی‌اتلاف نشان می‌دهد.



شکل (۶-۲): پاسخ‌های ورودی صفر مدار RLC موازی در حالت‌های مختلف

[1]- Complex Frequency Plane

در انتهای این قسمت لازم است تا نحوه تعیین ضرایب K_1 و K_2 را با استفاده از شرایط اولیه بیان نماییم. بدین منظور فرض کنید که ریشه‌های معادله مشخصه، حالت میرایی شدید را ایجاد کند. یعنی،

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 . t} + K_2 e^{s_2 . t}$$

حال با استفاده از روابط (۶-۹) داریم:

$$i_L(o) = K_1 + K_2 = I_o$$

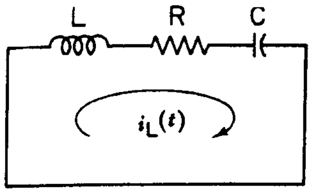
$$\frac{di_L(o)}{dt} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{V_o}{L}$$

که با حل این دو معادله اخیر، K_1 و K_2 به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$K_1 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{V_o}{L} - s_2 I_o\right)$$

$$K_2 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left(\frac{V_o}{L} - s_1 I_o\right)$$

مثال (۶-۱): برای مدار خطی مرتبه دوم RLC سری ارائه‌شده در شکل (۶-۳) نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۶-۳): مدار خطی مرتبه دوم مربوط به مثال (۶-۱)

حل: با استفاده از قانون KVL در مدار الکتریکی شکل (۶-۳) خواهیم داشت:

$$L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) + \frac{1}{C}\int_o^t i(\tau)d\tau + v_C(o) = o$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله اخیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = o \qquad (۱۷-۶)$$

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (۶-۱۷) برابر است با:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = o \qquad (۱۸-۶)$$

که دو ریشه معادله اخیر به‌شکل زیر تعیین می‌شود:

$$s_1, s_2 = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (۱۹-۶)$$

اگر دو ریشه معادله مشخصه (۶-۱۸) به‌صورت میرایی شدید باشد، آنگاه جواب معادله (۶-۱۷) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$i(t) = K_۱ e^{s_۱ . t} + K_۲ e^{s_۲ . t} \qquad (۶-۲۰)$$

که $K_۱$ و $K_۲$ از شرایط اولیه مدار به‌دست می‌آید.

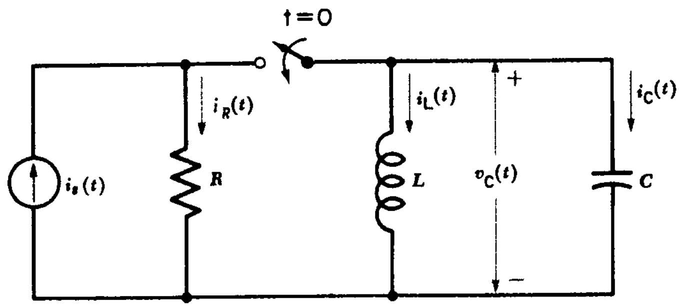
تمرین (۶-۱): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۶-۳)، فرض کنید که $R = ۶\Omega$ ، $L = ۱H$ و $C = \frac{۱}{۵}F$ می‌باشد. اگر شرایط اولیه به‌صورت $i_L(o) = ۱A$ و $\frac{di_L(o)}{dt} = oA$ باشد جریان $i_L(t)$ را بیابید.

جواب: $i_L(t) = \frac{۵}{۴} e^{-t} - \frac{۱}{۴} e^{-۵t}$

۶-۳- پاسخ حالت صفر- تحریک با منابع ورودی

در اینجا باز یک مدار RLC موازی را در نظر می‌گیریم که با منبع ورودی $i_s(t)$ و بدون حالات اولیه برای سلف و خازن می‌باشد. این مدار در شکل (۶-۴) نشان داده شده است. در این حالت، مدار با وجود اعمال منبع ورودی در زمان $t = o$ بدون هیچ‌گونه حالت اولیه‌ای برای زمان قبل از صفر می‌باشد. در این مدار با استفاده از قانون KCL در گره مدار می‌توان نوشت:

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = i_s(t) \qquad (۶-۲۱)$$



شکل (۶-۴): مدار خطی مرتبه دوم در حالت پاسخ حالت صفر

با توجه به روابط ارائه شده برای عناصر سلف، خازن و مقاومت در بخش قبلی، معادله دیفرانسیل مدار به‌شکل زیر حاصل می‌گردد:

$$LC\frac{d^{2}i_L(t)}{dt^{2}}+\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_s(t) \quad , \quad t\geq o \qquad (۶-۲۲)$$

که شرط اولیه آن به‌مقدار صفر است. یعنی،

$$i_L(o)=o \quad , \quad \frac{di_L(o)}{dt}=\frac{v_L(o)}{L}=o \qquad (۶-۲۳)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۶-۲۲) را در بخش قبلی نیز داشتیم؛ با این تفاوت که سمت راست معادله دیفرانسیل کنونی دارای منبع جریان $i_s(t)$ می‌باشد و همچنین شرایط اولیه نیز صفر می‌باشد. حال برای به‌دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل (۶-۲۲)، باید بر اساس مطالب ارائه شده در فصل پنجم (برای مدارهای خطی مرتبه اول) جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $i_h(t)$ و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $i_p(t)$ را محاسبه نموده و با جمع کردن این دو جواب، $i_L(t)$ به‌دست می‌آید.

نحوه تعیین جواب معادله دیفرانسیل همگن را در بخش قبل بیان نمودیم که برای این جواب، چهار حالت میرایی شدید، میرایی بحرانی، میرایی ضعیف و بی‌اتلاف بیان نمودیم.

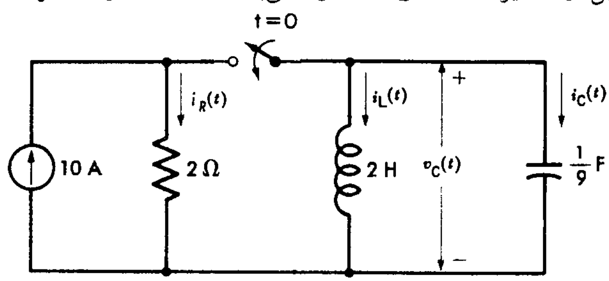
به‌عنوان مثال برای میرایی شدید، جواب معادله دیفرانسیل همگن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$i_L(t)=K_1e^{s_1.t}+K_2e^{s_2.t}$$

از طرف دیگر، تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل، بستگی به نوع تابع منبع ورودی $i_s(t)$ دارد. در صورتی‌که $i_s(t)$ ، یک تابع پله با مقدار ثابت باشد آنگاه $i_p(t)$ را می‌توان به‌صورت یک تابع ثابت در نظر گرفت و اگر $i_s(t)$ ، تابعی سینوسی باشد مناسب است تا جواب خصوصی نیز به‌صورت تابع سینوسی انتخاب شود.

در نهایت با جمع کردن جواب خصوصی و جواب معادله دیفرانسیل همگن به جواب نهایی می‌رسیم که ضرایب مجهول K_1 و K_2 با استفاده از دو شرط اولیه مدار (یعنی روابط ارائه شده در معادله (۶-۲۳) محاسبه می‌گردد.

مثال (۶-۲): در مدار ارائه‌شده در شکل (۶-۵) فرض کنید که کلید S در زمان $t=o$ بسته شده و قبل از آن نیز $v_C(o)=i_L(o)=o$ می‌باشد. ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.



شکل (۶-۵): مدار الکتریکی مرتبه دوم مربوط به مثال (۶-۴)

حل: با توجه به اینکه در مدار موردنظر، ولتاژ خازن $v_C(t)$ مجهول است، **لذا معادله** دیفرانسیل مرتبه دوم را می‌توان بر حسب این ولتاژ به‌دست آورد. بدین منظور با استفاده از قانون KCL داریم:

$$\frac{v_R(t)}{۲}+\frac{۱}{۲}\int_o^t v_L(\tau)d\tau+\frac{۱}{۹}\frac{dv_C(t)}{dt}=۱۰ \qquad (۶-۲۴)$$

با توجه به تساوی ولتاژهای دو سر مقاومت، سلف و خازن و با مشتق‌گیری مجدد از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۹}\frac{d^۲v_C(t)}{dt^۲}+\frac{۱}{۲}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{۱}{۲}v_C(t)=o \qquad (۶-۲۵)$$

در ابتدا جواب معادله دیفرانسیل همگن را به‌دست می‌آوریم. معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$\frac{۱}{۹}s^۲+\frac{۱}{۲}s+\frac{۱}{۲}=o$$

که با محاسبه ریشه های این معادله خواهیم داشت:

$$s_۱=-۱/۵ \quad , \quad s_۲=-۳$$

از این مقادیر در می‌یابیم که پاسخ مدار به‌صورت میرایی شدید است و لذا جواب معادله دیفرانسیل همگن به‌صورت زیر در می‌آید:

$$v_h(t)=K_۱e^{-۱/۵t}+K_۲e^{-۳t} \qquad (۶-۲۶)$$

با توجه به آنکه سمت راست معادله (۶-۲۵) برابر صفر می‌باشد، لذا جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نیز صفر می‌باشد. البته در صورتی‌که معادله دیفرانسیل را بر اساس جریان سلف می‌نوشتیم، معادله مذکور هم دارای جواب معادله دیفرانسیل همگن و هم جواب خصوصی می‌بود. توجیه فیزیکی صفر بودن جواب خصوصی را می‌توان به این صورت بیان نمود که با توجه به آنکه منبع ورودی، یک جریان ثابت dc به‌مقدار ۱۰A است، لذا سلف به‌صورت اتصال کوتاه در آمده و ولتاژ دو سر آن (که همان ولتاژ خازن نیز می‌باشد) صفر خواهد بود. پس جواب نهایی، همان پاسخ (۶-۲۶) است که ضرایب $K_۱$ و $K_۲$ با استفاده از شرایط اولیه محاسبه می‌شوند.

با توجه به غیر قابل تغییر بودن ناگهانی متغیرهای جریان سلف و ولتاژ خازن نتیجه می‌گیریم که،

$$i_L(o^+)=o \quad , \quad v_C(o^+)=o$$

با استفاده از کاربرد قانون KCL در زمان $t=o^+$ می‌توان نوشت:

$$i_R(o^+)+i_L(o^+)+i_C(o^+)=۱۰$$

و چون $i_R(o^+)=o$ است (زیرا ولتاژ دو سر آن که همان $v_C(o^+)$ است صفر می‌باشد) آنگاه،

$$o+o+i_C(o^+)=۱۰$$

و در نتیجه $i_C(o^+)=۱۰\text{A}$ می‌گردد. در نهایت با استفاده از رابطه $i_C(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\frac{dv_C(o^+)}{dt}=\frac{i_C(o^+)}{C}=\frac{۱۰}{\frac{۱}{۹}}=۹۰\text{A}/\sec$$

با استفاده از $v_C(o^+)$ و $\dfrac{dv_C(o^+)}{dt}$، مقادیر $K_۱$ و $K_۲$ با دو معادله زیر محاسبه می‌شود. بدین منظور داریم:

$$\begin{cases} v_C(o^+)=o=K_۱+K_۲ \\ \dfrac{dv_C(o^+)}{dt}=۹۰=-۱/۵K_۱-۳K_۲ \end{cases}$$

و با حل دو معادله اخیر $K_۱=۶۰$ و $K_۲=-۶۰$ به‌دست می‌آید. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶-۲۶)، ولتاژ $v_C(t)$ به‌دست می‌آید.

$$v_C(t)=v_h(t)+v_p(t)=۶۰e^{-۱/۵t}-۶۰e^{-۳t}$$

تمرین (۶-۲): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۶-۵) و در شرایط مثال (۶-۲)، الف) اگر مقدار خازن به $C=\frac{۱}{۴}\text{F}$ تغییر یابد ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید؛ ب) اگر خازن مدار به $C=\frac{۱}{۸}\text{F}$ تغییر یابد ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.

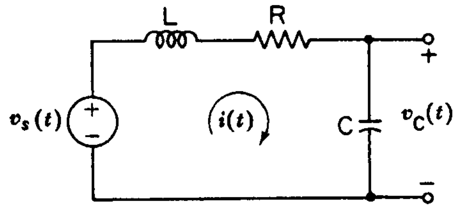
جواب: الف) $v_C(t)=۴۰e^{-t}\cos(t\text{-}\pi/۲)$ ب) $v_C(t)=۸۰te^{-۲t}$

۶-۴- پاسخ کامل مدارهای خطی مرتبه دوم

مشابه آنچه که در فصل پنجم هم بیان نمودیم، هر مدار الکتریکی خطی که دارای منابع الکتریکی ورودی و حالات اولیه برای سلف‌ها و خازن‌ها می‌باشند، دارای پاسخ کاملی خواهند بود که از جمع جبری پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر مهیا می‌گردد. البته پاسخ کامل این مدارها را نیز می‌توان به‌طور مستقیم بیان نمود. برای این منظور، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۶) را در نظر بگیرید که دارای منبع الکتریکی ورودی با ولتاژ $v_s(t)$ بوده و سلف مدار دارای جریان اولیه $i_L(o)$ و خازن مدار نیز دارای ولتاژ

اولیه $v_C(o)$ می‌باشد.. برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه دوم این مدار، قانون KVL را برای حلقه موجود می‌نویسیم:

$$L\frac{di(t)}{dt}+R.i(t)+v_C(o)+\frac{۱}{C}\int_o^t i(\tau)d\tau = v_s(t) \qquad (۶-۲۷)$$



شکل (۶-۶): مدار الکتریکی RLC با وجود منبع ورودی و شرایط اولیه

با استفاده از روابط (۶-۱) تا (۶-۳) که برای عناصر مقاومت، سلف و خازن بیان نمودیم، رابطه اخیر را می‌توان به‌شکل زیر بیان نمود:

$$LC\frac{d^۲v_C(t)}{dt^۲}+RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=v_s(t) \qquad (۶-۲۸)$$

با توجه به آنکه حالات اولیه مدار به‌صورت $v_C(o)=V(o)$ و $i_L(o)=I(o)$ می‌باشد لذا شرایط اولیه معادله دیفرانسیل ناهمگن (۶-۲۸) برابر خواهد بود با:

$$v_C(o)=V(o) \quad , \quad \frac{dv_C(o)}{dt}=\frac{i_C(o)}{C}=\frac{i_L(o)}{C}=\frac{I(o)}{C} \qquad (۶-۲۹)$$

اکنون برای حل معادله دیفرانسیل ناهمگن (۶-۲۸) با شرایط اولیه مشخص شده در رابطه (۶-۲۹) می‌توان از دو روش استفاده نمود. یک روش آن است که پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر را بر اساس مطالب ارائه شده در بخش‌های (۶-۲) و (۶-۳) محاسبه نموده و با هم جمع کنیم. روش دوم آن است که معادله دیفرانسیل همگن و جواب خصوصی مربوط به معادله (۶-۲۸) را به‌دست آورده و با هم جمع نماییم. در این حالت با توجه به شرایط اولیه ارائه‌شده در معادله (۶-۲۹) ضرایب ثابت جواب به‌دست آمده و در نهایت، به‌طور مستقیم به پاسخ کامل مدار دسترسی پیدا کرده ایم.

مثال (۶-۳): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۶) فرض کنید که $R=۶\Omega$ ، $L=۱\text{H}$ ، $C=\frac{۱}{۵}\text{F}$ و $v_s(t)=\frac{t}{۳}$ می‌باشد. در صورتی‌که در زمان $t=o$ ، مقادیر $v_C(o)=۱\text{V}$ و $i_L(o)=\frac{۲}{۵}\text{A}$ را داشته باشیم، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t\ge o$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده از معادله (۶-۲۸) خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۵}\frac{d^{۲}v_C(t)}{dt^{۲}}+\frac{۶}{۵}\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=\frac{t}{۳} \quad , \quad t\geq o$$

جواب معادله همگن این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برابر است با:

$$v_h(t)=K_۱e^{-t}+K_۲e^{-۵t}$$

با توجه به آنکه ولتاژ منبع به‌صورت خطی و برابر $t/۳$ است، پس جواب خصوصی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$v_p(t)=A+B.t$$

که با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مدار، ضرایب A و B به‌دست می‌آید که،

$$v_p(t)=\frac{-۲}{۵}+\frac{t}{۳}$$

در نهایت با جمع کردن جواب معادله همگن و جواب خصوصی می‌توان نوشت:

$$v_C(t)=v_h(t)+v_p(t)=K_۱e^{-t}+K_۲e^{-۵t}-\frac{۲}{۵}+\frac{t}{۳}$$

برای تعیین ضرایب $K_۱$ و $K_۲$ ، از شرایط اولیه مدار در زمان $t=o$ استفاده می‌شود. لذا،

$$\begin{cases} v_C(o)=۱=K_۱+K_۲-{}^{۲}\!/_{۵} \\ \dfrac{dv_C(o)}{dt}=\dfrac{i_L(o)}{C}=\dfrac{{}^{۲}\!/_{۵}}{{}^{۱}\!/_{۵}}=۲=-K_۱-۵K_۲+\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

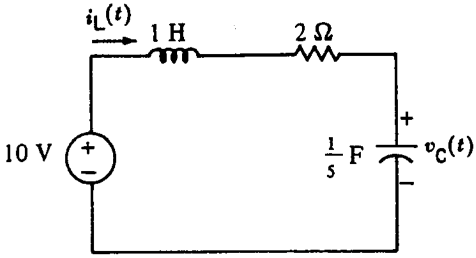
با حل دو معادله اخیر ضرایب $K_۱$ و $K_۲$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K_۱={}^{۱۳}\!/_{۶} \quad , \quad K_۲=-{}^{۲۳}\!/_{۳۰}$$

لذا جواب نهایی برابر خواهد بود با:

$$v_C(t)={}^{۱۳}\!/_{۶}\,e^{-t}-{}^{۲۳}\!/_{۳۰}\,e^{-۵t}-\frac{۲}{۵}+\frac{t}{۳}$$

تمرین (۶-۳): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۷) موردنظر است. در صورتی‌که در این مدار $v_C(o)=۶\text{V}$ و $i_L(o)=۲\text{A}$ باشد، مقدار $v_C(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.



شکل (۶-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۶-۳)

جواب: $v_C(t) = e^{-t}\left(-۴\cos ۲t + ۳\sin ۲t\right) + ۱۰$

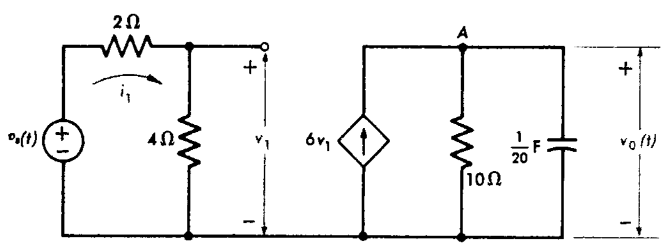
۶-۵- پاسخ مدارهای خطی به ورودی تابع پله

در اکثر مدارهای الکتریکی، تحریک مدار در زمان خاصی اتفاق می‌افتد که معمولاً این زمان را در لحظه $t = o$ در نظر می‌گیریم. برای بیان عمل کلیدزنی و اعمال منبع ورودی به یک مدار می‌توان از تابع پله واحد استفاده نمود. این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} o & t < o \\ ۱ & t > o \end{cases} \qquad (۶-۳۰)$$

این تابع به این معنی است که در قبل از زمان صفر، مقدار تابع، صفر بوده و پس از این زمان، به‌مقدار واحد خواهد بود. بر این اساس، اگر منبع ولتاژی به‌صورت $v(t) = ۱۰\, u(t)$ باشد، این بدان معنی است که مقدار این منبع در زمان $t < o$ برابر صفر بوده و برای زمانهای $t > o$ مقدار ولتاژ منبع برابر ۱۰V ثابت خواهد ماند. اکنون با اعمال یک تابع پله‌ای به‌عنوان ورودی مدار الکتریکی، پاسخ مدار را می‌توان به کمک روش‌های ارائه شده در بخش‌های قبلی به‌دست آورد. سپس با اعمال منبع ورودی پله، فقط ورودی به ازای $t > o$ ایجاد شده و در $t < o$ صفر و بی‌اثر می‌باشد. به‌عبارت دیگر، اگر ورودی پله به‌صورت منبع ولتاژ باشد، به ازای $t < o$ ، منبع موردنظر، اتصال کوتاه می‌گردد و اگر ورودی پله، یک منبع جریان باشد، به ازای $t < o$ ، منبع موردنظر، اتصال باز خواهد بود. پس اگر هیچ منبع ورودی به ازای $t < o$ اثری در مدار نداشته باشد، آنگاه خازن‌ها در $t = o$ دارای ولتاژ اولیه نبوده و سلف‌ها نیز در $t = o$ فاقد جریان اولیه هستند.

مثال (۶-۴): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۶-۸) فرض کنید که منبع ولتاژ ورودی به‌صورت $v_s(t) = ۰/۲۵\, u(t)$ باشد. ولتاژ اولیه خازن در زمان $t = o$ را صفر در نظر بگیرید. در این مدار، $v_o(t)$ را بیابید.



شکل (۶-۸): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۶-۴)

حل: در ابتدا باید معادله دیفرانسیل مدار را به‌دست آوریم. بدین منظور با استفاده از قانون KCL برای گره A خواهیم داشت:

$$-6v_1(t)+\frac{1}{10}v_o(t)+\frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt}=0$$

برای حذف متغیر $v_1(t)$ در معادله دیفرانسیل اخیر، باید برای حلقه سمت چپ مدار، معادله KVL را بنویسیم. لذا:

$$v_s(t)=6i_1$$

$$v_1(t)=4i_1=\frac{4}{6}v_s(t)=\frac{2}{3}v_s(t)$$

با جایگزینی رابطه اخیر در معادله دیفرانسیل مدار می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{10}v_o(t)+\frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt}=\frac{12}{3}v_s(t)$$

$$\frac{1}{10}v_o(t)+\frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt}=u(t)$$

این معادله دیفرانسیل برای $t>0$ به‌خاطر ورودی $u(t)$ به‌شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{1}{10}v_o(t)+\frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt}=1$$

با توجه به آنکه معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل به‌صورت $s=0$ $\frac{1}{20}s+\frac{1}{10}$ است لذا پاسخ معادله همگن این معادله دیفرانسیل برابر خواهد بود با:

$$v_{oh}(t)=Ke^{-2t}$$

همچنین جواب خصوصی این معادله برابر $v_{op}(t)=10$ است. در نتیجه جواب کل برابر است با:

$$v_o(t)=10+Ke^{-2t}$$

با توجه به شرایط اولیه مدار که $v_o(0)=0$ است، لذا ضریب K برابر مقدار ۱۰- انتخاب می‌شود. در نهایت جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر در می‌آید:

$$v_o(t)=10\left(1-e^{-2t}\right)\cdot u(t)$$

۶-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل، به منظور تکمیل بحث ارائه‌شده در فصل پنجم، که در ارتباط با مدارهای خطی مرتبه اول بود، به بررسی و تحلیل مدارهای الکتریکی مرتبه دوم پرداختیم. این نوع مدارها را می‌توان با استفاده از عناصر سلف، خازن و مقاومت در کنار یکدیگر ایجاد نمود. خلاصه مباحث ارائه شده در این فصل را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:

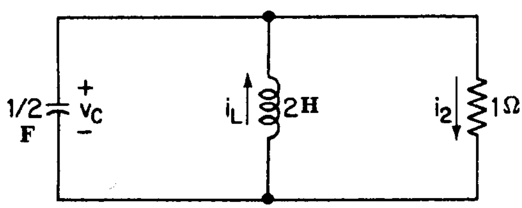
● مشابه مدارهای خطی مرتبه اول، در تحلیل مدارهای خطی مرتبه دوم نیز باید معادلات دیفرانسیلی را حل نمود که در این نوع مدارها از نوع مرتبه دوم می‌باشد. برای حل این معادله دیفرانسیل باید دو شرط اولیه در این مدار را داشته باشیم.

● در مدارهای خطی مرتبه دوم از دو روش می‌توان استفاده نمود. یک روش آن است که پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر مدار را به‌دست آورده و با جمع نمودن این دو، پاسخ کامل مدار را به‌دست آوریم. روش دوم آن است که به‌طور مستقیم، پاسخ مدار را تعیین نماییم. بدین معنی که با تعیین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مدار و با حل مستقیم آن، جواب موردنظر را مشخص نماییم.

● مقدار ریشه‌های معادله مشخصه، بستگی به مقادیر R ، L و C مدار دارد. بعلاوه با توجه به این مقادیر و تغییر مکان ریشه‌های معادله مشخصه، درمی‌یابیم که پاسخ مدار به چهار حالت میرایی شدید، میرایی بحرانی، میرایی ضعیف و بی‌اتلاف امکان‌پذیر خواهد بود.

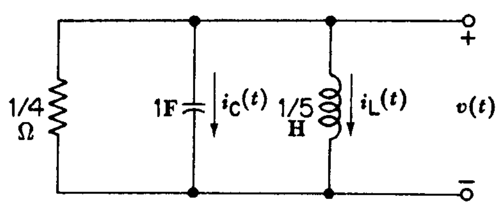
۶-۷- مسائل مروری

۱- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۶-۹) فرض کنید که $i_L(o)=\frac{۳}{۵}A$ و $v_C(o)=oV$ باشد. در این مدار جریان $i_۲(t)$ را بیابید.



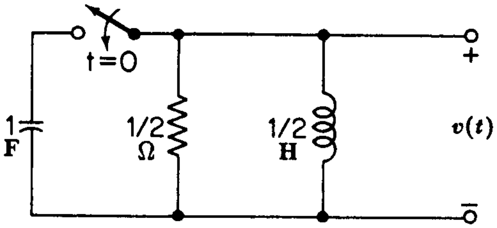
شکل (۶-۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۰) فرض کنید که $v(o)=۱V$ و $v'(o)=o$ باشد. در این مدار برای زمان $t \geq o$ مطلوبست: الف) ولتاژ $v(t)$؛ ب) جریان $i_L(t)$؛ ج) جریان $i_C(t)$.



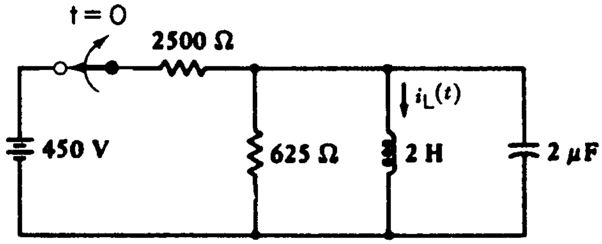
شکل (۶-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۱)، قبل از بسته‌شدن کلید در زمان $t=o$ ، خازن به‌مقدار ۳V شارژ شده است. پس از بسته‌شدن کلید و برای زمان $t\geq o$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



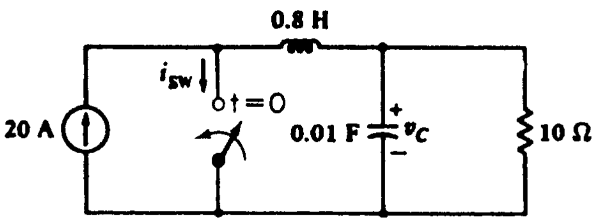
شکل (۶-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۲)، کلید موردنظر به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=o$ باز می‌شود. نحوه تغییرات جریان $i(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.



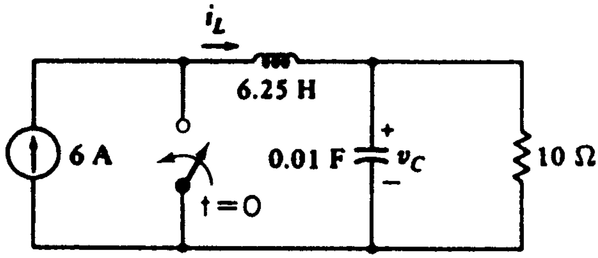
شکل (۶-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- مدار الکتریکی در شکل (۶-۱۳) موردنظر است. در این مدار، کلید به‌مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=o$ بسته می‌گردد. برای زمان $t\geq o$ نحوه تغییرات $v_C(t)$ و $i_{sw}(t)$ را بیابید.



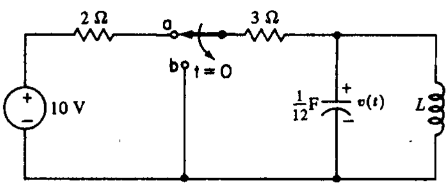
شکل (۶-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

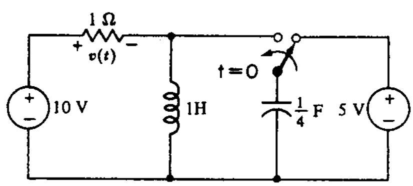
۶- کلید مدار ارائه‌شده در شکل (۶ - ۱۴) به‌مدت طولانی باز بوده و در $t=o$ بسته می‌شود. مقادیر $v_C(t)$ و $i_L(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.



شکل (۶-۱۴): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

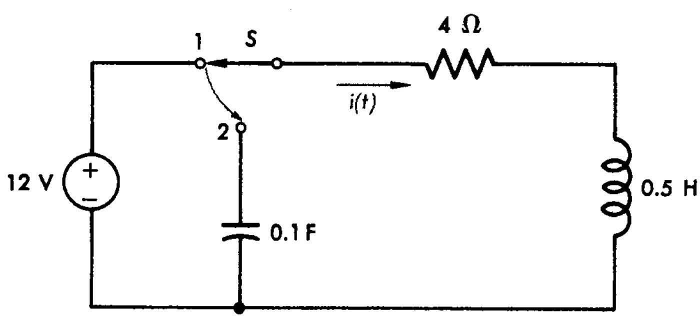
۷- در مدارهای الکتریکی شکل (۶-۱۵) کلید پس از مدت زمان طولانی و در زمان $t=o$ تغییر وضعیت می‌دهند. در این دو مدار، $v(t)$ را بیابید.





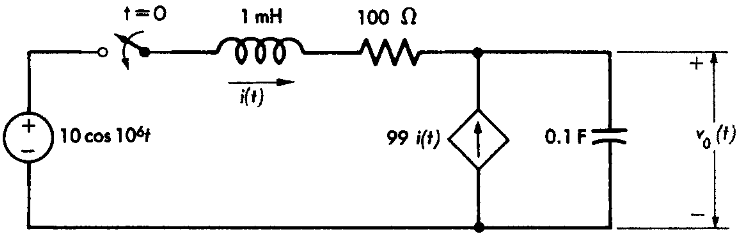
شکل (۶-۱۵): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۶)، کلید S به‌مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده و در زمان $t=o$ به وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. برای زمان $t \geq o$ جریان $i(t)$ را بیابید.



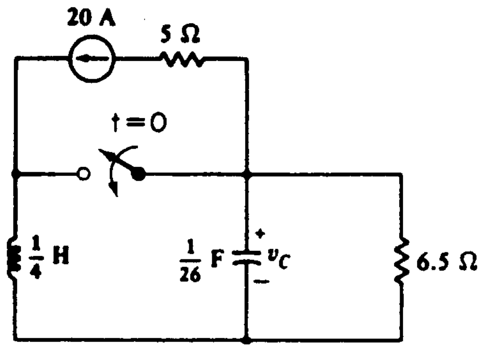
شکل (۶-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- شکل (۶-۱۷) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که کلید S به‌مدت طولانی باز بوده و در $t=o$ بسته می‌شود. مقدار $v_o(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



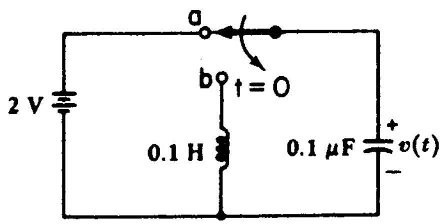
شکل (۶-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- کلید مشخص شده در مدار ارائه‌شده در شکل (۶-۱۸) به‌مدت طولانی باز بوده و در $t = o$ بسته می‌شود. در این مدار، تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



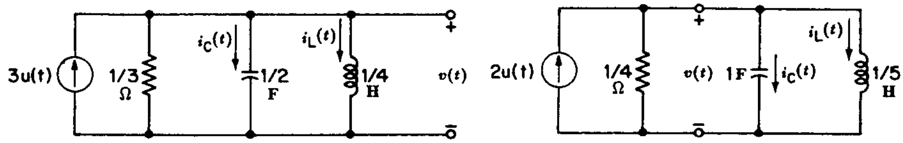
شکل (۶-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۶-۱۹)، کلید مدار به‌مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده قرار دارد. سپس در زمان $t = o$ کلید، تغییر وضعیت می‌دهد. در این حالت برای زمان $t \geq o$ ، ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



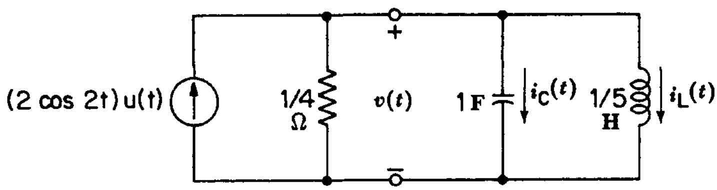
شکل (۶-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)

۱۲- برای مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۲۰)، فرض کنید که $v(o) = o\text{V}$ و $i_L(o) = o\text{A}$ باشد. در این دو مدار، متغیرهای $v(t)$ ، $i_L(t)$ و $i_C(t)$ را برای زمان $t \geq o$ بیابید.



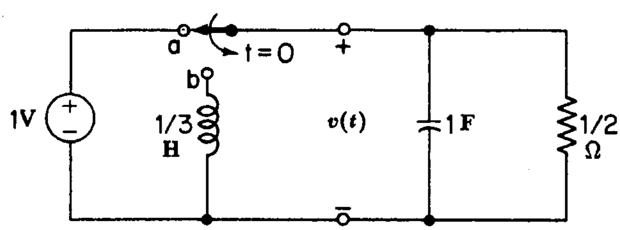
شکل (۶-۲۰): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۲)

۱۳- در مدار الکتریکی شکل (۶-۲۱)، فرض می‌شود که $v(o)=o\text{V}$ و $v'(o)=o$ باشد. در این حالت، نحوه تغییرات $v(t)$ ، $i_C(t)$ و $i_L(t)$ را به دست آورید.



شکل (۶-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۳)

۱۴- کلید مشخص شده در مدار شکل (۶-۲۲) به‌مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته است و در زمان $t=o$ به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این مدار و برای زمان $t\geq o$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



شکل (۶-۲۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۴)