فصل پنجم

مدارهای الکتریکی مرتبه اول

۵-۱- مقدمه

در فصل‌های قبل، عناصر مقاومت، سلف و خازن را تشریح نموده و مدارهای مقاومتی ساده را بر اساس روش‌های مختلف حل مدارهای الکتریکی تحلیل نمودیم. در این فصل برآنیم تا تنوع در عناصر مدار را گسترش داده و مدارهای مقاومتی-سلفی (RL) و مدارهای مقاومتی-خازنی (RC) را مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. در حل این نوع مدارها به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول برخورد می‌کنیم و به‌همین خاطر به این نوع مدارها، مدارهای مرتبه اول[1] نیز می‌گویند. همچنین عناصر مورد بررسی در این فصل، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان هستند. به‌منظور درک بهتر از روند حل این نوع مدارها، ابتدا مفاهیم پاسخ ورودی صفر[2] و پاسخ حالت صفر[3] مدارهای RL و RC را در بخش‌های مجزا مطرح نموده و در نهایت، مفهوم پاسخ کامل این نوع مدارها را با جمع این دو پاسخ در مدارها بیان خواهیم کرد. در فصل بعدی، مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RLC مطرح خواهند شد که در این نوع مدارها، نیاز به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد. به‌همین علت به این نوع مدارها، مدارهای الکتریکی مرتبه دوم می‌گویند.

---

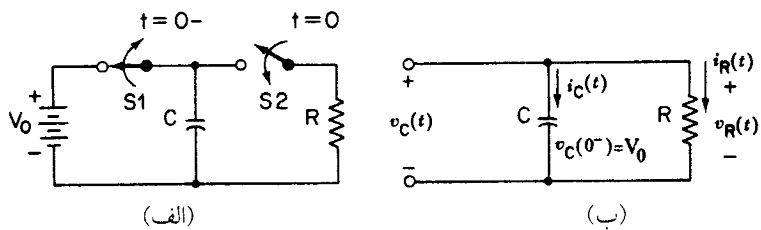
[1]- First Order Circuits
[2]- Zero Input Response
[3]- Zero State Response

۵-۲- پاسخ ورودی صفر

در فصل چهارم بیان نمودیم که عناصر خازن و سلف بترتیب قادرند تا یک ولتاژ اولیه ($v_C(o)$) و یک جریان اولیه ($i_L(o)$) را داشته باشند. بنابراین در مدارهای الکتریکی RL یا RC که به یک منبع الکتریکی متصل باشند، جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها با زمان، در حال تغییر هستند. در این بخش، هدف آن است که مدارهای الکتریکی موردنظر را بدون هیچ‌گونه منبع الکتریکی ورودی (یا ورودی صفر) و فقط با وجود شرایط اولیه برای عناصر سلف یا خازن (یعنی $v_C(o)$ یا $i_L(o)$) مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. لذا به این‌گونه تحلیل مدار، پاسخ ورودی صفر می‌گویند.

۵-۲-۱- مدار الکتریکی RC

یک مدار RC ساده مطابق با شکل (۵-۱) در نظر بگیرید که خازن مدار بدون هیچ‌گونه ولتاژ اولیه است. در این مدار ابتدا فرض می‌شود که خازن C به‌مدت طولانی از طریق کلید S۱ به منبع ولتاژ dc ثابت (یک باتری) با ولتاژ V_o متصل باشد. در صورتی‌که این کلید تا زمان $t < o$ بسته باشد نتیجه می‌گیریم که خازن C به‌مقدار V_o شارژ شده است. حال اگر در زمان $t = o^-$ (زمان o^- یعنی دقیقاً قبل از زمان $t = o$ است) کلید S۱ قطع شده و در زمان $t = o$ ، کلید S۲ وصل شود، آنگاه مدار ارائه شده در شکل (۵-۱- ب) ایجاد می‌گردد که خازن C با یک ولتاژ اولیه $v_C(o) = V_o$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر، در زمان $t = o$ ، خازن موردنظر دارای بار ذخیره شده $Q(o) = C.V_o$ خواهد بود که با گذشت زمان، این بار الکتریکی از طریق مقاومت R و با ایجاد جریان $i(t)$ تخلیه می‌شود. در این روند، انرژی اولیه ذخیره شده در خازن، به‌صورت انرژی تلفاتی در مقاومت (تلفات حرارتی) ظاهر می‌شود.



شکل (۵-۱): مدار RC مرتبه اول؛ الف): در وضعیت کلیدزنی؛ ب)پس از کلیدزنی

برای تحلیل مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۱- ب)، برای زمان $t \geq o$ می‌توان از قوانین KVL یا KCL ارائه شده در فصل سوم استفاده نمود. با توجه به آنکه برای عنصر

مقاومت، رابطه $v_R(t)=R.i(t)$ و برای خازن موردنظر، رابطه $i_C(t)=C.{dv_C(t)}/{dt}$ و $v_C(o)=V_o$ می‌باشد، لذا با استفاده از قوانین KVL و KCL خواهیم داشت:

$$\text{KVL}: \quad v_C(t)=v_R(t) \quad t\geq o \tag{۵-۱}$$

$$\text{KCL}: \quad i_C(t)+i_R(t)=o \quad t\geq o \tag{۵-۲}$$

با استفاده از روابط مشخصه سلف و خازن در معادله (۵-۲) می‌توان نوشت:

$$C.\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_R(t)}{R}=o \tag{۵-۳}$$

با توجه به تساوی ولتاژ دو سر مقاومت و خازن بر اساس معادله (۵-۱)، رابطه (۵-۳) به‌شکل زیر اصلاح می‌گردد:

$$C.\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=o \quad t\geq o \;\;,\;\; v_C(o)=V_o \tag{۵-۴}$$

معادله اخیر، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که بیانگر رفتار مدار خطی ارائه شده در شکل (۵-۱- ب) می‌باشد. جواب کلی معادله دیفرانسیل اخیر به‌صورت یک تابع نمایی زیر است:

$$v_C(t)=K.e^{-t/RC} \tag{۵-۵}$$

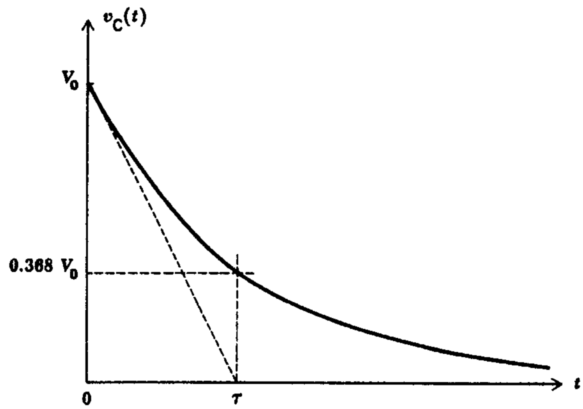
که ضریب K را با شرط اولیه $v_C(o)=V_o$ به‌صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$K=v_C(o)=V_o$$

در نهایت، جواب نهایی معادله (۵-۴) برابر است با:

$$v_C(t)=V_o.e^{-t/RC} \quad t\geq o \tag{۵-۶}$$

نحوه تغییرات ولتاژ دو سر خازن بر اساس رابطه (۵-۶) را می‌توان در شکل (۵-۲) مشاهده نمود که کاهش این ولتاژ با ثابت زمانی $\tau=RC$ انجام می‌گیرد.



شکل (۵-۲): نحوه تغییرات ولتاژ خازن $v_C(t)$

با تعیین ولتاژ $v_C(t)$ ، جریان خازن را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{V_o}{R}.e^{-t/RC} \qquad t\geq o \qquad (۵-۷)$$

همچنین بر اساس روابط (۵-۱) و (۵-۲) می‌توان نوشت:

$$v_R(t)=v_C(t)=V_o.e^{-t/RC} \qquad t\geq o \qquad (۵-۸)$$

$$i_R(t)=-i_C(t)=\frac{V_o}{R}.e^{-t/RC} \qquad t\geq o \qquad (۵-۹)$$

مثال (۵-۱): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۱) مدنظر است که در آن $C=۱\mu F$ ، $R=۱۰k\Omega$ و $v(o)=V_o=۱۰V$ می‌باشد. منحنی تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ و جریان $i_C(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.

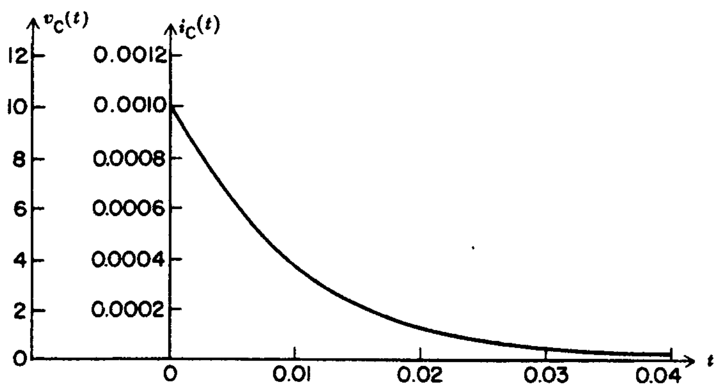
حل: بر اساس معادله (۵-۶) ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$v_C(t)=V_o.e^{-t/RC}=۱۰e^{-۱۰۰t}\ (V)$$

که همچنین جریان $i_C(t)$ نیز بر اساس رابطه (۵-۷) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

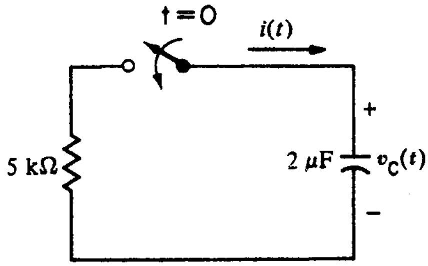
$$i_C(t)=۰/۰۰۱e^{-۱۰۰t}$$

که منحنی تغییرات ولتاژ و جریان الکتریکی دو سر این خازن در شکل (۵-۳) نشان داده شده است.



شکل (۵-۳): شکل موج‌های مربوط به مثال (۵-۱)

تمرین (۵-۱): در مدار شکل (۵-۴)، قبل از وصل کلید در زمان $t=o$ ، خازن دارای ولتاژ اولیه ۱۰۰V می‌باشد. پس از وصل کلید، ولتاژ خازن $v_C(t)$ ، $i(t)$ را برای $t\geq o$ بیابید.



شکل (۵-۴): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۱)

جواب: $v_C(t) = ۱۰۰ e^{-۱۰۰t}$ (V) ، $i(t) = -۰/۰۲ e^{-۱۰۰t}$ (A)

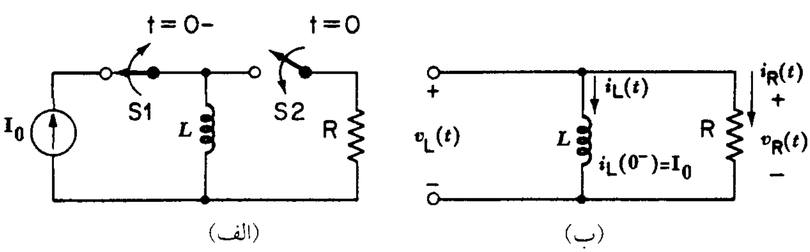
۵-۲-۲- مدار الکتریکی RL

مدارهای الکتریکی متشکل از R و L ، نوع دیگری از مدارهای خطی مرتبه اول می‌باشند. برای این منظور، مدار ارائه شده در شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای زمان $t < o$ ، کلید S۱ وصل و کلید S۲ قطع می‌باشد. در این حالت، جریان سلف به‌مقدار جریان ثابت I_o خواهد رسید. حال در زمان $t = o$ ، کلید S۱ قطع و کلید S۲ در همان زمان وصل می‌شود. در این حالت، سلف مذکور دارای یک جریان اولیه $i_L(o) = I_o$ خواهد بود که دارای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف برابر $\frac{۱}{۲} L.I_o^۲$ می‌باشد. پس از زمان $t = o$ ، این انرژی مغناطیسی از طریق مقاومت R تلف شده و باعث می‌شود که جریان $i_L(t)$ به مرور زمان، کاهش یابد.

مشابه تحلیل مدار RC در بخش قبل، معادلات KVL و KCL در این مدار به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{KVL}: \quad v_L(t) = v_R(t) \quad t \geq o \qquad (۵-۱۰)$$

$$\text{KCL}: \quad i_L(t) + i_R(t) = o \quad t \geq o \qquad (۵-۱۱)$$



شکل (۵-۵): مدار RL مرتبه اول؛ الف) در وضعیت کلیدزنی؛ ب) پس از کلیدزنی

با توجه به آنکه $v_R(t)=R.i_R(t)$ ، $v_L(t)=L.{di_L(t)}/{dt}$ و $i_L(o)=I_o$ می‌باشد لذا رابطه (۵-۱۰) را می‌توان به‌صورت معادله دیفرانسیل زیر بیان نمود:

$$L.\frac{di_L(t)}{dt}+R.i_L(t)=o \qquad t\geq o \quad , \quad I_L(o)=I_o \tag{۵-۱۲}$$

با حل این معادله دیفرانسیل و با در نظر گرفتن جریان اولیه $i_L(o)=I_o$ خواهیم داشت:

$$i_L(t)=I_o.e^{-\left({R}/{L}\right).t} \qquad t\geq o \tag{۵-۱۳}$$

که در این رابطه، ثابت زمانی جریان $i_L(t)$ به‌مقدار $\tau={L}/{R}$ می‌باشد.

مثال (۵-۲): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۵- ب) فرض کنید که $R=۴\Omega$ ، $L=۲\text{H}$ و $i_L(o)=۵\text{A}$ باشد. در این حالت، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.

حل: با استفاده از معادله (۵-۱۲) و بر اساس قانون KVL در مدار مذکور می‌توان نوشت:

$$۲\frac{di_L(t)}{dt}+۴i_L(t)=o \qquad I_L(o)=۵\text{A}$$

که با حل این معادله خواهیم داشت:

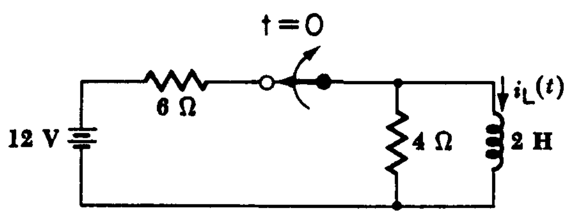
$$i_L(t)=K.e^{-۲t} \qquad t\geq o$$

با توجه به آنکه در $t=o$ ، $i_L(o)=۵\text{A}$ می‌باشد، لذا ضریب K برابر ۵A خواهد شد. لذا،

$$i_L(t)=۵e^{-۲t} \qquad t\geq o$$

همچنین ثابت زمانی این مدار برابر $\tau={L}/{R}=۰/۵$ خواهد بود.

تمرین (۵-۲): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۶) فرض می‌شود که کلید مدار به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=o$ کلید، باز می‌شود. در این حالت برای زمان $t\geq o$ ، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۲)

راهنمایی و جواب: ابتدا جریان اولیه سلف $i_L(o)$ را بیابید که با توجه به اتصال کوتاه شدن سلف در قبل از قطع کلید $i_L(o)=۲\text{ A}$ می‌شود. آنگاه $i_L(t)=۲e^{-۲t}$

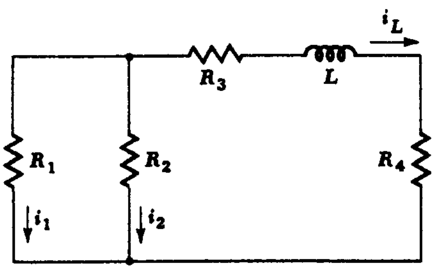
۵-۲-۳- مدارهای جامع‌تر RL و RC

در این بخش برآنیم تا مطالب ارائه شده در دو بخش قبلی برای مدارهای RL و RC ساده را برای مدارهای جامع‌تری که دارای چند مقاومت سری- موازی است، گسترش دهیم. برای این منظور کافی است که ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر سلف در مدار RL یا از دو سر خازن در مدار RC را محاسبه نموده و سپس از روابط ارائه‌شده در دو بخش قبلی برای تحلیل مدار مورد نظر استفاده کنیم. به‌عنوان نمونه، مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۷) را در نظر بگیرید که سلف مدار، دارای جریان اولیه $i_L(o)$ می‌باشد. برای یافتن $i_L(t)$ برای زمان‌های $t \geq o$، ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر این سلف را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$R_{eq} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} + R_۳ + R_۴ \qquad (۵-۱۴)$$

در نتیجه با توجه به آنکه ثابت زمانی مدار معادل به صورت $\tau = L/R_{eq}$ می‌باشد آنگاه جریان $i_L(t)$ برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = i_L(o).e^{-t/\tau} = i_L(o).e^{-\frac{R_{eq}}{L}t} \qquad t \geq o \qquad (۵-۱۵)$$



شکل (۵-۷) یک مدار جامع RL

همچنین می‌توان با تقسیم جریان $i_L(t)$ در دو شاخه مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ ، جریان‌های $i_۱(t)$ و $i_۲(t)$ را به‌دست آورد:

$$i_۱(t) = -\frac{R_۲}{R_۱ + R_۲} i_L(o).e^{-t/\tau} \qquad (۵-۱۶)$$

$$i_۲(t) = -\frac{R_۱}{R_۱ + R_۲} i_L(o).e^{-t/\tau} \qquad (۵-۱۷)$$

از این دو رابطه اخیر، می‌توان جریان اولیه $i_۱(o)$ و $i_۲(o)$ را برای دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ نیز تعیین نمود:

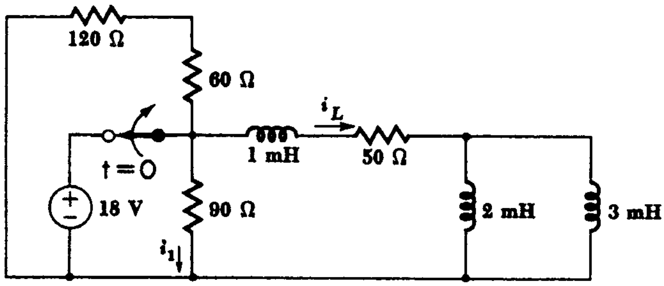
$$i_۱(o) = -\frac{R_۲}{R_۱ + R_۲} i_L(o)$$

$$i_۲(o) = -\frac{R_۱}{R_۱ + R_۲} i_L(o)$$

در نتیجه ارتباط جریان‌های اولیه $i_۱(o)$ و $i_۲(o)$ به‌شکل زیر مشخص می‌شود:

$$i_۲(o) = \frac{R_۱}{R_۲} i_۱(o)$$

مثال (۵-۳): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۸) مفروض است که کلید موردنظر به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = o$ باز می‌شود. نحوه تغییرات جریان‌های $i_L(t)$ و $i_۱(t)$ را محاسبه نمایید. فرض کنید که $i_L(o)$ برابر ۰/۳۶A باشد.



شکل (۵-۸): مدار جامع RL مربوط به مثال (۵-۳)

حل: در ابتدا برای تعیین جریان اولیه $i_۱(o)$ باید جریان اولیه $i_L(o)$ را بین دو مقاومت ۹۰Ω و ۱۸۰Ω تقسیم جریان نمود. یعنی:

$$i_۱(o) = -\frac{۱۸۰}{۱۸۰ + ۹۰} i_L(o)$$

حال با توجه به موازی بودن دو سلف ۳mH و ۲mH و سری شدن موازی این دو سلف با سلف ۱mH خواهیم داشت:

$$L_{eq} = \frac{۲ \times ۳}{۲ + ۳} + ۱ = ۲/۲\text{mH}$$

همچنین مقاومت معادل مدار RL را می‌توان از موازی کردن دو مقاومت ۹۰Ω با ۱۸۰Ω و سری شدن با مقاومت ۵۰Ω به‌دست آورد:

$$R_{eq} = \frac{۹۰ \times ۱۸۰}{۹۰ + ۱۸۰} + ۵۰ = ۱۱۰\Omega$$

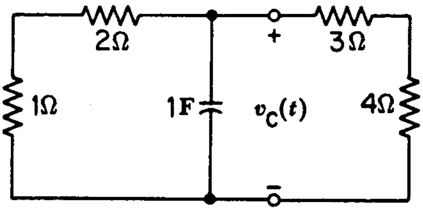
در نهایت جریان $i_L(t)$ بر اساس رابطه (۵-۱۵) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = ۰/۳۶e^{-\left(۱۱۰/_{۲/۲\times۱۰^{-۳}}\right)t} = ۰/۳۶e^{-۰/۰۵\times۱۰^{۶}t}$$

و،

$$i_۱(t) = -۰/۲۴e^{-۰/۰۵\times۱۰^{۶}t}$$

تمرین (۵-۳): در مدار ارائه‌شده در شکل (۵-۹)، اگر $v_C(o) = ۶V$ باشد آنگاه $v_C(t)$ را برای زمان‌های $t \geq o$ بیابید.



شکل (۵-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۳)

جواب: $v_C(t) = -۶e^{-۱۰/_{۲۱}t}$

۵-۳-پاسخ حالت صفر

در بخش (۵-۲) حالتی از پاسخ مدارهای الکتریکی را بررسی نمودیم که برای زمان‌های $t \geq o$ هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته و فقط عناصر سلف و خازن مدار دارای جریان و ولتاژ اولیه می‌باشند که این نوع پاسخ مدار را پاسخ ورودی صفر نامیدیم. حال در این بخش می‌خواهیم پاسخ مداری را به‌دست آوریم که عناصر سلف و خازن مدار، دارای شرایط اولیه نبوده ولی مدار، دارای منبع الکتریکی ورودی باشد. لذا به این نوع پاسخ مدار، پاسخ حالت صفر می‌گویند.

برای توصیف این نوع پاسخ مدار، شکل (۵-۱۰) را در نظر بگیرید که خازن مدار، فاقد ولتاژ اولیه می‌باشد؛ زیرا کلید قبل از زمان $t = o$ در حالت وصل بوده و منبع جریان، هیچ تأثیری در مدار RC ندارد. حال اگر در زمان $t = o$ ، کلید موردنظر باز شود با استفاده از قانون KCL برای سه عنصر موازی منبع، خازن و مقاومت می‌توان نوشت:

$$C.\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = i(t) = I_o \quad t \geq o \ , \ v_C(o) = o \qquad (۱۸-۵)$$

لازم به‌ذکر است که با استفاده از قانون KVL در می‌یابیم که ولتاژ دو سر هر سه عنصر با هم مساوی هستند. معادله (۵-۱۸) یک معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه اول می‌باشد که برای حل آن، نیاز به تعیین جواب معادله دیفرانسیل همگن ($v_h(t)$) و یک جواب خصوصی ($v_p(t)$) از معادله دیفرانسیل ناهمگن می‌باشد. با جمع این دو جواب خواهیم داشت:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t) \qquad (۵-۱۹)$$

با توجه به معادله دیفرانسیل همگن با صفر قرار دادن سمت راست معادله (۵-۱۸) به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C.\frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{v_h(t)}{R} = o$$

لذا با حل آن جواب همگن به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$v_h(t) = K.e^{-t/RC} \qquad (۵-۲۰)$$

برای تعیین یک جواب خصوصی از معادله (۵-۱۸) کافی است ساده‌ترین مقدار ولتاژ $v_C(t)$ را در نظر گرفت که در این معادله، صادق باشد. لذا ساده‌ترین جواب به‌صورت مقدار ثابت زیر خواهد بود:

$$v_p(t) = R.I_o \qquad (۵-۲۱)$$

با جمع کردن دو جواب معادله همگن و جواب خصوصی، جواب کلی به‌صورت زیر خواهد بود:

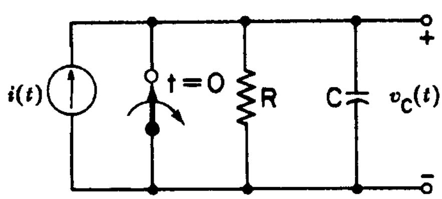
$$v_C(t) = K.e^{-t/RC} + R.I_o$$

حال ضریب مجهول K را می‌توان با شرط اولیه $v_C(o) = o$ تعیین نمود. یعنی،

$$o = K + R.I_o$$
$$K = -R.I_o$$

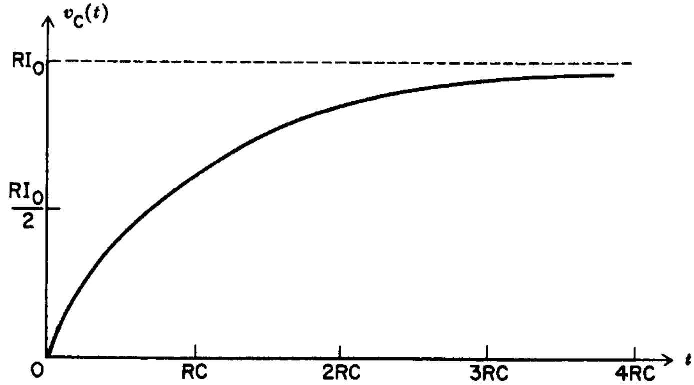
در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_C(t) = R.I_o\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad t \geq o \qquad (۵-۲۲)$$



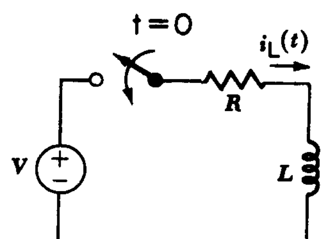
شکل (۵-۱۰): مدار RC با منبع جریان ورودی

شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان در شکل (۵-۱۱) مشاهده نمود که با گذشت زمان طولانی، ولتاژ $v_C(t)$ به‌مقدار ثابت $R.I_o$ میل خواهد کرد. لازم به‌ذکر است که مقدار RC برابر ثابت زمانی مدار می‌باشد ($\tau = RC$).



شکل (۵-۱۱): شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ برای مدار شکل (۵-۱۰)

مثال (۵-۴): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۲) و در زمان $t = o$ ، کلید موردنظر بسته می‌شود. در صورتی‌که جریان اولیه سلف $i_L(o) = o$ باشد جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۱۲): مدار RL مربوط به مثال (۵-۴)

حل: با استفاده از قانون KVL در حلقه موجود در مدار، می‌توان نوشت:

$$L.\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) = V \qquad t \geq o$$

برای یافتن جواب معادله همگن، کافی است سمت راست معادله اخیر را برابر صفر قرار داده و با توجه به اینکه $i(o) = o$ می‌باشد لذا،

$$i_h(t) = K.e^{-\left(R/L\right)t} \qquad t \geq o$$

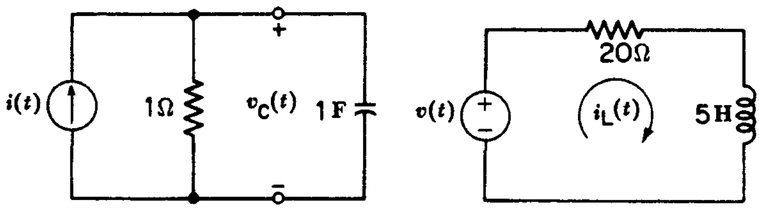
جواب خصوصی نیز برابر $i_p(t)=V/R$ می‌باشد. لذا با جمع جواب معادله همگن و جواب خصوصی خواهیم داشت:

$$i_h(t)=K.e^{-(R/L)t}+V/R \qquad t\geq o$$

با توجه به آنکه در زمان $t=o$ ، $i(o)=o$ می‌باشد لذا $K=-V/R$ بوده و در نهایت داریم:

$$i(t)=V/R\left(\text{۱}-e^{-(R/L)t}\right) \qquad t\geq o$$

تمرین (۵-۴): در مدارهای الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۳) اگر برای $t\geq o$ ، منبع جریان $I=\text{۱A}$ و منبع ولتاژ $V=\text{۳V}$ باشند، ولتاژ $v_C(t)$ در شکل (۵-۱۳- الف) و جریان $i_L(t)$ را در شکل (۵-۱۳- ب) بیابید.



(الف) (ب)

شکل (۵-۱۳): مدارهای الکریکی مربوط به تمرین (۵-۴)

جواب: $i_L(t)=\frac{\text{۳}}{\text{۲۰}}\left(\text{۱}-e^{-\text{۴}t}\right)$ و $v_C(t)=\left(\text{۱}-e^{-t}\right)$

۵-۴-پاسخ کامل

در بخش‌های (۵-۲) و (۵-۳) بترتیب پاسخ مدارهای الکتریکی را ناشی از حالات اولیه سلف‌ها و خازن‌ها، و پاسخ مدار را نسبت به منابع ورودی بیان نمودیم که با نام‌های پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر مشخص کردیم. حال اگر مداری دارای منابع ورودی همراه با حالات اولیه برای سلف‌ها و خازن‌ها باشند، پاسخ مدار را پاسخ کامل[1] می‌نامند. لذا می‌توان گفت که پاسخ‌های ورودی صفر و حالت صفر، حالت‌های خاصی از

[1]- Complete Response

پاسخ کامل خواهند بود. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که پاسخ کامل هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، برابر مجموع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر خواهد بود.
برای این منظور مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۴) را در نظر بگیرید. در این مدار، فرض کنید که $i_S(t)=I_o$ و ولتاژ اولیه خازن در زمان $t=o$ هم $v_C(o)=V_o$ باشد که کلید در زمان $t=o$ از وضعیت a به b تغییر وضعیت می‌دهد، پس برای زمان $t\geq o$ ، مدار الکتریکی هم دارای حالت اولیه خازن و هم منبع ورودی جریان است. با کاربرد قانون KCL در مدار مذکور خواهیم داشت:

$$C.\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=I_o \qquad v_C(o)=V_o\ ,\ t\geq o \tag{۵-۲۳}$$

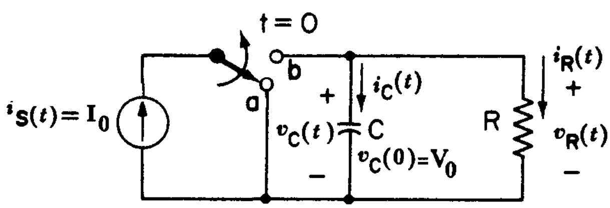
برای حل این مدار، سه پاسخ حالت صفر، ورودی صفر و پاسخ کامل را به‌طور جداگانه محاسبه نموده و نشان می‌دهیم که پاسخ کامل از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر نیز قابل محاسبه خواهد بود.

پاسخ ورودی صفر: معادله دیفرانسیل مدار در حالت ورودی صفر (یعنی $i_S(t)=o$) برابر است با:

$$C.\frac{dv'_C(t)}{dt}+\frac{v'_C(t)}{R}=o \qquad v'_C(o)=V_o\ ,\ t\geq o \tag{۵-۲۴}$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v'_C(t)=V_o.e^{-t/RC} \qquad t\geq o \tag{۵-۲۵}$$



شکل (۵-۱۴): مدار الکتریکی RC با منبع ورودی و حالت اولیه خازن

پاسخ حالت صفر: معادله دیفرانسیل مدار در وضعیت حالت صفر (یعنی $v_C(o)=o$) برابر است با:

$$C.\frac{dv''_C(t)}{dt}+\frac{v''_C(t)}{R}=I_o \qquad v''_C(o)=o \tag{۵-۲۶}$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v''_C(t) = R.I_o.\left(۱ - e^{-t/RC}\right) \quad t \geq o \qquad (۲۷-۵)$$

پاسخ کامل: اکنون معادله دیفرانسیل مدار واقعی که همان معادله (۵-۲۳) می‌باشد را به‌طور مستقیم حل می‌کنیم. برای این منظور ابتدا جواب معادله همگن را محاسبه می‌نماییم:

$$v_{C\,h}(t) = K.e^{-t/RC} \qquad (۲۸-۵)$$

همچنین ساده‌ترین جواب خصوصی معادله (۵-۲۳) به‌صورت $v_{C\,p}(t) = R.I_o$ می‌باشد و در نتیجه، جواب کلی معادله (۵-۲۳) برابر خواهد بود با:

$$v_C(t) = v_{C\,h}(t) + v_{C\,p}(t) = K.e^{-t/RC} + R.I_o \qquad (۲۹-۵)$$

حال برای تعیین ضریب مجهول K از شرط اولیه $v_C(o) = V_o$ در زمان $t = o$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} V_o &= K + R.I_o \\ K &= V_o - R.I_o \end{aligned} \qquad (۳۰-۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵-۳۰) در (۵-۲۹) پاسخ کامل مدار برابر است با:

$$v_C(t) = (V_o - R.I_o).e^{-t/RC} + R.I_o \qquad (۳۱-۵)$$

با مرتب سازی معادله (۵-۳۱) خواهیم داشت:

$$v_C(t) = \left(V_o.e^{-t/RC}\right) + \left[R.I_o\left(۱ - e^{-t/RC}\right)\right] \qquad (۳۲-۵)$$

که در این معادله، جمله داخل کروشه اول، همان پاسخ ورودی صفر ارائه‌شده در معادله (۵-۲۵)، و جمله داخل کروشه دوم، پاسخ حالت صفر ارائه‌شده در معادله (۵-۲۷) خواهد بود. به‌عبارت دیگر، پاسخ کامل مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، از جمع پاسخ‌های ورودی صفر و حالت صفر تعیین می‌شوند.

مثال (۵-۵): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۴) اگر $C = ۱/۲\,\mu F$ ، $R = ۱/۲\,\Omega$ ، $I_o = ۲A$ و $v_C(o) = -۳V$ باشد، نحوه تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید و نشان دهید که از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر به‌دست می‌آید.

حل: با استفاده از معادله (۵-۲۵) پاسخ ورودی صفر برابر است با:

$$v'_C(t) = -۳ \times e^{-۴t} \qquad t \geq o$$

همچنین با استفاده از معادله (۵-۲۷) پاسخ حالت صفر به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

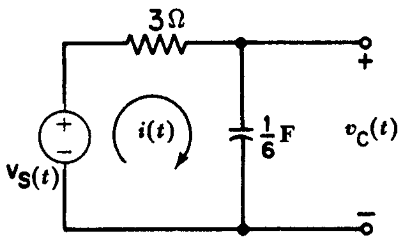
$$v''_C(t) = \left(1 - e^{-4t}\right) \quad t \geq o$$

از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر خواهیم داشت:

$$v_C(t) = 1 - 4e^{-4t} \quad t \geq o$$

حال اگر از معادله (۵-۳۱) که پاسخ کامل مدار است، استفاده کنیم به رابطه اخیر خواهیم رسید.

تمرین (۵-۵): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۱۵)، فرض کنید که $v_S(t) = 2\text{V}$ و $v_C(o) = 1\text{V}$ باشد. برای زمان $t \geq o$ ، ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۵)

جواب: $v_C(t) = 2 - e^{-2t}\ (\text{V})$ ، $i(t) = \frac{1}{3} e^{-2t}\ (\text{A})$

۵-۵- شرایط اولیه در مدارهای با کلیدزنی

در این بخش به بررسی شرایط اولیه خازن‌ها و سلف‌ها در زمان‌های کلیدزنی می‌پردازیم. در فرآیند کلیدزنی در مدارهای الکتریکی مورد بحث، فرض می‌شود که کلیدزنی در لحظه $t = o$ اتفاق افتد. لذا مناسب است که وضعیت مدار را قبل از کلیدزنی و بعد از کلیدزنی از هم متمایز نماییم. به همین منظور از نماد o^- برای نشان دادن لحظه قبل از کلیدزنی و از نماد o^+ برای نشان دادن لحظه بعد از کلیدزنی استفاده می‌شود.

در فصل چهارم، عنصر خازن را به‌عنوان یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی مطرح نمودیم که روابط زیر برای آن صادق می‌باشد:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \tag{۵-۳۳}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C . v_C^2 \tag{۵-۳۴}$$

رابطه (۵-۳۳) نشان می‌دهد که هر تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن (یعنی $\frac{dv_C(t)}{dt} = \infty$) نیاز به یک جریان خازن به‌مقدار بینهایت خواهد بود. همچنین رابطه (۵-۳۴) نشان می‌دهد که تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن، باعث تغییر ناگهانی در انرژی ذخیره‌شده در خازن می‌شود که آن هم نیاز به یک منبع با توان بینهایت می‌باشد که هر دو واقعه، غیرممکن می‌باشد. لذا با توجه به آنکه تغییرات جریان نمی‌تواند بینهایت باشد، در نتیجه می‌توان گفت که ولتاژ خازن در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به‌طور ناگهانی تغییر کند. به‌عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) \qquad (۵-۳۵)$$

این موضوع را می‌توان به‌گونه‌ای دیگر برای عنصر سلف بیان نمود. در فصل چهارم برای عنصر سلف روابط زیر را ارائه نمودیم:

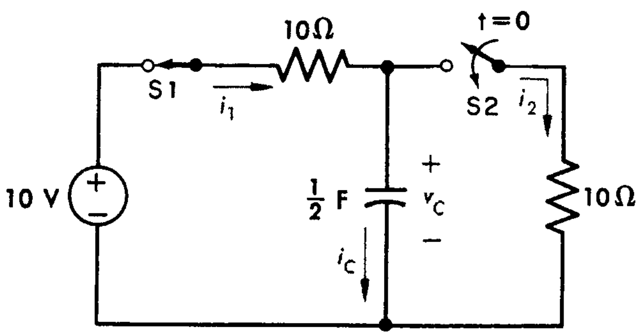
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (۵-۳۶)$$

$$W_L = \frac{۱}{۲}L.i_L^{۲} \qquad (۵-۳۷)$$

حال اگر جریان سلف در لحظه کلیدزنی تغییر ناگهانی داشته باشد (یعنی $\frac{di_L(t)}{dt} = \infty$) ولتاژ دو سر سلف باید به یک مقدار بینهایتی تغییر یابد. همچنین نیاز به یک توان بینهایت خواهد بود که هر دو وضعیت، غیرممکن می‌باشد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که جریان سلف در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به‌طور ناگهانی تغییر یابد. لذا خواهیم داشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) \qquad (۵-۳۸)$$

مثال (۵-۶): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۶) فرض می‌شود که کلید S۱ به‌مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t = o$ ، کلید S۲ نیز بسته می‌شود. مقادیر $v_C(o^+)$ و $i_C(o^+)$ را (یعنی ولتاژ و جریان خازن، پس از لحظه بسته شدن کلید S۲) بیابید.



شکل (۵-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۵-۶)

حل: با توجه به آنکه کلید S۱ به‌مدت طولانی بسته بوده است، لذا عنصر خازن به‌صورت اتصال باز در می‌آید و در نتیجه ولتاژ خازن به ۱۰V افزایش می‌یابد. در این حالت، دیگر هیچ جریانی از مدار نمی‌گذرد. یعنی،

$$v_C(o^-) = ۱۰\text{V} \quad ، \quad i_C(o^-) = o\text{A}$$

در لحظه $t = o$ که کلید S۲ نیز بسته می‌شود، با توجه به آنکه ولتاژ دو سر خازن نمی‌تواند به‌طور ناگهانی تغییر کند، لذا با توجه به اصل پیوستگی ولتاژ خازن خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) = ۱۰\text{V}$$

حال برای یافتن $i_C(o^+)$ کافی است که در زمان $t = o^+$ ، قانون KVL را برای هر دو حلقه مدار بنویسیم:

$$۱۰ - ۱۰ i_۱(o^+) - v_C(o^+) = o$$

$$v_C(o^+) - ۱۰ i_۲(o^+) = o$$

و با استفاده از قانون KCL برای گره مدار داریم:

$$i_۱(o^+) = i_۲(o^+) + i_C(o^+)$$

از حل سه معادله اخیر خواهیم داشت:

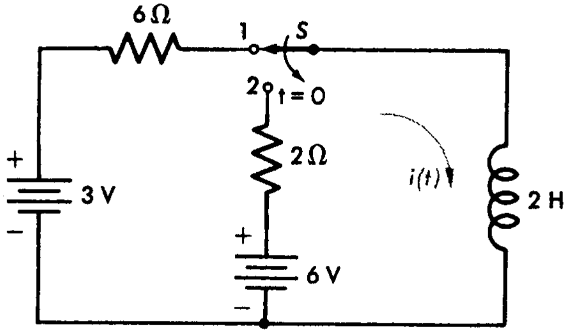
$$i_۱(o^+) = o\text{A}$$

$$i_۲(o^+) = ۱\text{A}$$

$$i_C(o^+) = -۱\text{A}$$

مثال (۵-۷): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۱۷) موردنظر می‌باشد. در این مدار، کلید S به‌مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و در لحظه $t = o$ در وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. مطلوبست تعیین:

الف) جریان سلف $i_L(t)$ برای $t \geq o$ ؛ ب) مقادیر $v_L(o^-)$ ، $v_L(o^+)$ و $\dfrac{di_L(o^-)}{dt}$



شکل (۵-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۵-۷)

حل: الف) در زمان $t < o$ که کلید به‌مدت طولانی در وضعیت ۱ قرار داشته است، سلف به‌صورت اتصال کوتاه در می‌آید. لذا،

$$i_L(o^-) = {}^{۳}\!/_{۶} = ۰/۵\text{A}$$

با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف در وضعیت کلید، می‌توان نوشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) = ۰/۵\text{A}$$

حال برای یافتن جریان سلف در زمان $t \geq o$ ، باید با استفاده از قانون KVL ، معادله دیفرانسیل مدار را به‌صورت زیر مشخص نمود:

$$۲\frac{di_L(t)}{dt} + ۲i_L(t) = ۶ \quad , \quad i_L(o^+) = ۰/۵\text{A}$$

با تعیین جواب معادله همگن و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اخیر، جریان $i_L(t)$ را به‌شکل زیر خواهیم داشت:

$$i_L(t) = ۳ - ۲/۵e^{-t}\ (\text{A})$$

ب) با توجه به اتصال کوتاه شدن سلف در زمان قبل از تغییر وضعیت کلید، نتیجه می‌گیریم که $v_L(o^-) = o$ می‌باشد. در لحظه $t = o^+$ با استفاده از قانون KVL در این زمان می‌توان نوشت:

$$v_L(o^+) + i_L(o^+) \times ۲ = ۶$$

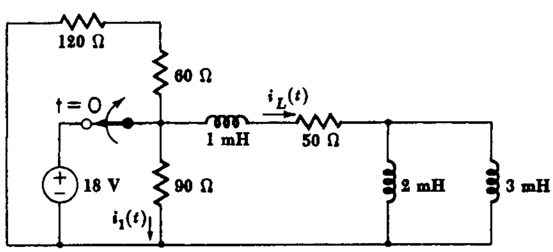
و در نتیجه،

$$v_L(o^+) = ۶ - (۰/۵) \times ۲ = ۵\ \text{V}$$

بنابراین با توجه به رابطه $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ داریم:

$$\frac{di_L(o^+)}{dt} = \frac{v_L(o^+)}{L} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵\text{A/sec}$$

تمرین (۵-۶): برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۱۸) فرض می‌شود که کلید موردنظر به‌مدت طولانی بسته بوده است و در زمان $t = o$ باز می‌شود. در این مدار، جریان $i_L(t)$ و $i_1(t)$ را برای زمان $t \geq o$ بیابید.



شکل (۵-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۶)

جواب: $i_L(t) = ۰/۳۶e^{-۵۰۰۰t}$ (A) ، $i_1(t) = -۰/۲۴e^{-۵۰۰۰t}$ (A)

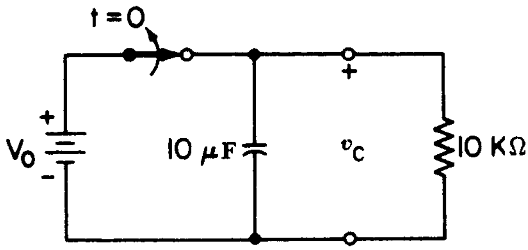
۵-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در فصل‌های دوم و چهارم، با عناصر مقاومت، سلف، خازن و منابع الکتریکی آشنا شدیم و در فصل سوم، تحلیل مدارهای الکتریکی مقاومتی را مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل به تحلیل مدارهای خطی مرتبه اول که شامل مدارهای RL یا RC بودند، پرداختیم. خلاصه این مباحث را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

- پاسخ ورودی صفر یک مدار الکتریکی به این معنا است که در سیستم، هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته باشد و پاسخ مدار، فقط تحت تأثیر شرایط اولیه سلف‌ها یا خازن‌های مدار باشند. شرایط اولیه برای عنصر سلف، جریان اولیه آن (یعنی $i_L(o)$) و برای عنصر خازن، ولتاژ اولیه آن (یعنی $v_C(o)$) می‌باشد.
- در صورتی‌که در یک مدار الکتریکی، پاسخ مدار را بر اساس منابع الکتریکی ورودی به‌دست آورده و اثر شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها را در تحلیل مدار در نظر نگیریم، آن پاسخ را پاسخ حالت صفر می‌گوییم.
- در صورتی‌که یک مدار الکتریکی تحت تأثیر منابع ورودی و شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها باشند، با تحلیل آن به پاسخ کامل مدار دسترسی پیدا کرده‌ایم. این پاسخ کامل مدار را می‌توان از جمع کردن پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر مدار به‌دست آورد.
- با توجه به آنکه در عنصر خازن، ولتاژ آن در زمان کلیدزنی، قادر به تغییر ناگهانی نیست، لذا با انجام کلیدزنی در زمان $t = o$ در هر مدار الکتریکی، $v_C(o^+) = v_C(o^-)$ خواهد بود.
- عمل کلیدزنی در مدارهای الکتریکی RL باعث تغییر ناگهانی جریان سلف‌ها نخواهد شد. زیرا لازمه این امر نیاز به ایجاد یک ولتاژ بینهایت در دو سر سلف است. در نتیجه در زمان کلیدزنی در $t = o$ و برای عنصر سلف، رابطه $i_L(o^+) = i_L(o^-)$ صادق خواهد بود.

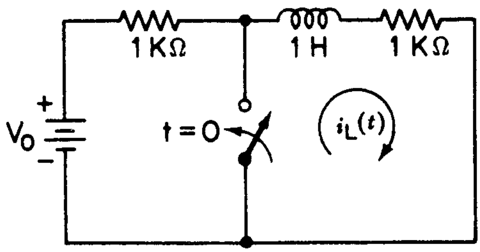
۵-۷-مسائل مروری

۱- در صورتی‌که در مدار ارائه‌شده در شکل (۵-۱۹) کلید موردنظر به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = o$ باز گردد، ولتاژ دو سر خازن را برای زمان $t \geq o$ بیابید.



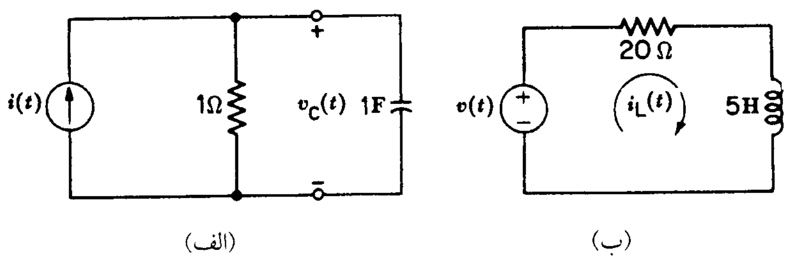
شکل (۵-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- مدار الکتریکی مطابق با شکل (۵-۲۰) موردنظر می‌باشد. در این مدار، کلید موردنظر به‌مدت طولانی باز بوده و در زمان $t = o$ بسته می‌شود. تغییرات جریان $i_L(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



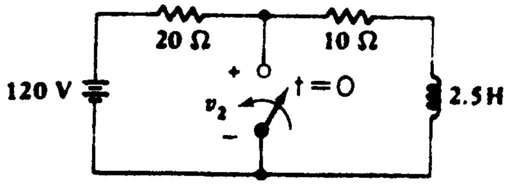
شکل (۵-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- در دو مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۱)، فرض کنید که در مدار (الف)، $i = ۵A$ و $v_C(o) = oV$ و در مدار (ب) $v = ۵V$ و $i(o) = ۱A$ باشد. در مدار (الف) $v_C(t)$ در مدار (ب) $i_L(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



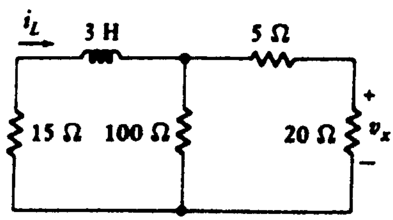
شکل (۵-۲۱): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۲)، کلید موردنظر که به‌مدت طولانی باز بوده است در زمان $t = o$ بسته می‌شود. در این مدار، جریان سلف را برای $t \geq o$ تعیین نمایید.



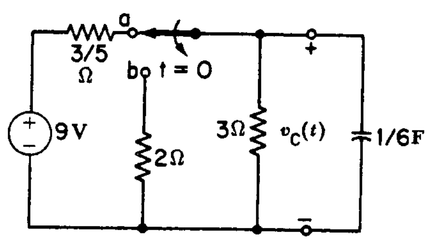
شکل (۵-۲۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- شکل (۵-۲۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در زمان $t=o$ ، $i_L(o)=۱۰\text{A}$ می‌باشد. برای $t \geq o$ ، $i_L(t)$ و $v_x(t)$ را بیابید.

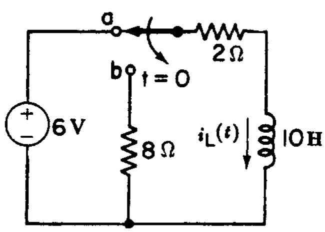


شکل (۵-۲۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۴) در زمان $t=o$ ، کلید از وضعیت a (که به‌مدت طولانی در این وضعیت قرار داشته است) به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در مدار (الف)، جریان $i_L(t)$ و در مدار (ب)، ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.



(ب)

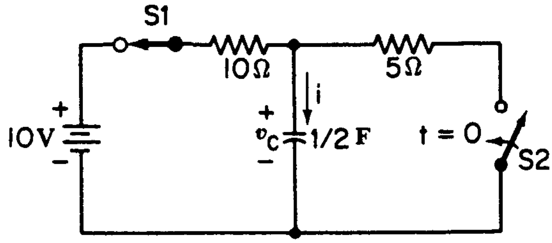


(الف)

شکل (۵-۲۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۶)

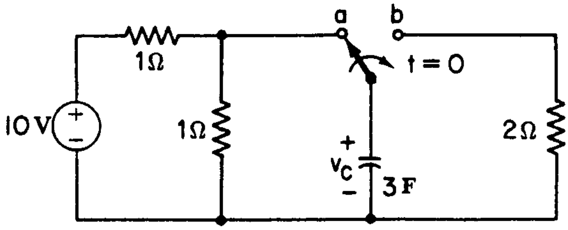
۷- شکل (۵-۲۵) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، کلید S۱ به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=o$ ، کلید S۲ نیز بسته می‌شود. در این حالت، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.

راهنمایی: از تبدیل مدار معادل تونن به نورتن استفاده کنید.



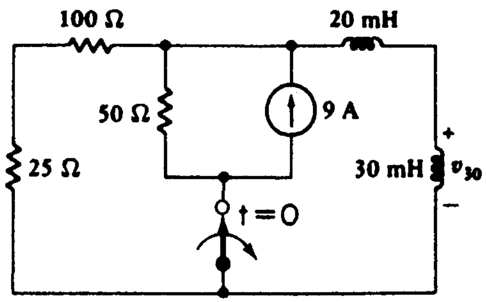
شکل (۵-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۶) کلید موردنظر به‌مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته و در زمان $t=o$ در وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



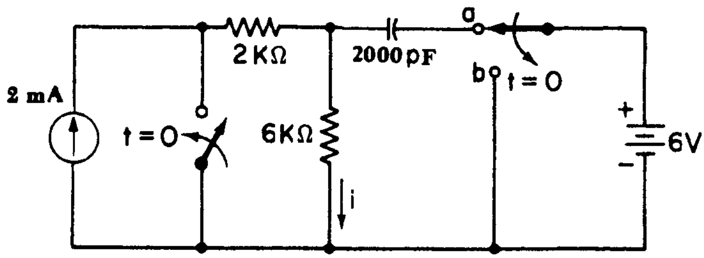
شکل (۵-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- کلید موردنظر در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۷) به‌مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=o$ باز می‌شود. برای زمان $t \geq o$ ، $v_{30}(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۸) کلید سمت چپ در لحظه $t=o$ بسته می‌شود و همزمان با آن، کلید سمت راست از وضعیت a به b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، $v_C(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq o$ بیابید.



شکل (۵-۲۸): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)