

## فصل چهارم

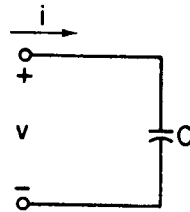
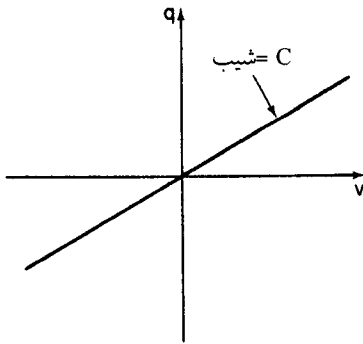
### خازن‌ها و سلف‌ها

#### ۴-۱- مقدمه

در فصل دوم و سوم، مدارهای الکتریکی از نوع مقاومتی را مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم. در این راستا ابتدا در فصل دوم، عناصر اساسی شبکه از قبیل مقاومت و منابع الکتریکی را بیان نمودیم. دیدیم که در عنصر مقاومت، بین متغیرهای ولتاژ و جریان آن، رابطه‌ای به نام قانون اهم وجود دارد. سپس در فصل سوم به تحلیل مدارهای الکتریکی مقاومتی پرداختیم و روش‌های اساسی حلقه و گره را در حل این مدارها ارائه نمودیم. در این فصل می‌خواهیم دو عنصر دو سر دیگر را به نام‌های خازن و سلف معرفی نماییم که خصوصیتی کاملاً متفاوت با عنصر دو سر مقاومت دارند. تفاوت عمده این دو عنصر با عنصر مقاومت در آن است که برخلاف عنصر مقاومت (که بین ولتاژ و جریان آن، یک رابطه خطی برقرار بود) بین متغیر ولتاژ و جریان آنها یک رابطه مشتق و یا انتگرالی وجود دارد؛ به عبارت دیگر، معادلات به صورت معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی است. حل این‌گونه مدارهای الکتریکی با وجود سلف‌ها و خازن‌ها به حل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی وابستگی خواهد داشت که متفاوت از حل معادلات جبری در مدارهای مقاومتی می‌باشد. البته در فصول بعدی، روش بسیار جالبی را ارائه خواهیم داد که در حالات خاصی (که بسیار هم متداول است) قادر خواهیم بود تا از خواص روش‌های حل مدارهای مقاومتی در این نوع مدارها هم استفاده کنیم که اصطلاحاً به روش تبدیل لاپلاس معروف است.

## ۲-۴- خازن الکتریکی

یکی دیگر از عناصری که به شکل وسیع در مدارهای الکتریکی به کار می‌روند، خازن‌های الکتریکی هستند. نمایش این خازن را می‌توان به صورت شکل (۱-۴) در نظر گرفت. این عنصر از دو صفحه موازی هم تشکیل شده است که با اعمال ولتاژ الکتریکی به این دو صفحه، مقداری بار الکتریکی بر روی این دو صفحه، ذخیره می‌شود. با افزایش میزان ولتاژ اعمالی به این خازن، بار الکتریکی ذخیره شده در آن نیز افزایش می‌یابد بیان معادلی که می‌توان در تعریف خازن بیان نمود آن است که: عنصری که در هر لحظه از زمان  $t$ ، میان بار الکتریکی ذخیره شده در آن (یعنی  $q(t)$ ) با ولتاژ دو سر آن (یعنی  $v(t)$ )، رابطه‌ای در صفحه  $v-q$  داشته باشد، خازن گفته می‌شود. حال اگر این رابطه، به صورت خطی باشد که از مبدأ صفحه  $v-q$  بگذرد، یک خازن خطی نامیده می‌شود. شکل (۲-۴) یک خازن خطی را نشان می‌دهد. همچنین اگر این مشخصه با زمان نیز تغییر نکند، خازن خطی تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.



شکل (۱-۴): نمایش یک خازن الکتریکی شکل (۲-۴): مشخصه یک خازن خطی

لازم به ذکر است که در شکل (۱-۴)، مقدار  $q(t)$ ، باری خواهد بود که در لحظه  $t$  در صفحه‌ای از خازن که جهت قراردادی جریان  $i(t)$  به آن صفحه وارد می‌شود، قرار دارد. حال هنگامی که  $i(t)$  مثبت است، بارهای مثبت به صفحه فوقانی که بار آن  $q(t)$  است، وارد می‌شود و بالطبع، میزان تغییرات بار مذکور در واحد زمان (که همان  $i(t)$  است) نیز مقدار مثبتی خواهد بود. به عبارت دیگر،

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1-4)$$

که در این رابطه،  $q(t)$  بر حسب کولن و  $i(t)$  بر حسب آمپر می‌باشد.

## ۳-۴- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

براساس شکل (۲-۴) و تعریفی که از خازن خطی تغییرناپذیر با زمان در بخش قبلی ارائه نمودیم، معادله مشخصه این نوع خازن را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$q(t) = C \cdot v(t) \quad (۲-۴)$$

که در این رابطه،  $C$  ظرفیت خازن<sup>۱</sup> است که مستقل از زمان و ولتاژ اعمالی می‌باشد. ظرفیت خازن بیان می‌کند که با ولتاژ اعمالی مورد نظر و با توجه به مشخصات فیزیکی خازن، چه مقدار بار بر روی صفحات آن ذخیره شده است. واحد ظرفیت خازن را فاراد<sup>۲</sup> می‌نامیم و با علامت  $F$  نشان می‌دهیم.

با جایگزینی رابطه (۲-۴) در (۱-۴) و با در نظر گرفتن ثابت بودن ظرفیت خازنی  $C$  داریم:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (۳-۴)$$

حال اگر از رابطه اخیر از بازه صفر تا زمان  $t$  انتگرال‌گیری نماییم می‌توان نوشت:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (۴-۴)$$

که  $v(0)$  ولتاژ اولیه خازن در زمان  $t=0$  است؛ به عبارت دیگر، قبل از انتقال بار از منبع به خازن ( $t < 0$ )، روی صفحات خازن می‌تواند مقداری بار اولیه وجود داشته باشد (یعنی  $q(0)$  که آن هم، معادل با ولتاژی معادل ولتاژ اولیه  $v(0)$  خواهد بود).

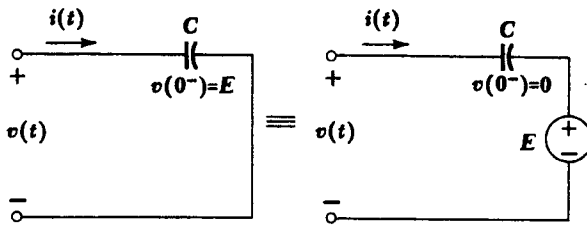
لازم به ذکر است که در بسیاری از مواقع، به جای متغیر  $\frac{1}{C}$  از متغیر الاستانس<sup>۳</sup> استفاده می‌شود که با  $S$  نمایش می‌دهیم. بالطبع، واحد متغیر الاستانس را داراف (عکس کلمه فاراد) می‌نامیم و با حرف  $D$  نمایش می‌دهیم (همان‌گونه که عکس مقاومت  $R$  را با  $G$  نمایش داده و واحد آن را مهو نامیدیم).

همچنین معادله (۴-۴) نشان می‌دهد که برای زمان  $t > 0$ ، ولتاژ دو سر خازن  $v(t)$  از جمع ولتاژ اولیه خازن  $v(0)$  در زمان  $t=0$ ، و ولتاژ دو سر خازن با ظرفیت  $C$  و بدون ولتاژ اولیه تشکیل شده است. بنابراین، هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه  $v(0)$  را می‌توان به صورت اتصال سری یک منبع ولتاژ  $DC$  با ولتاژ  $E = v(0)$  و یک خازن با ظرفیت خازنی  $C$  و بدون ولتاژ اولیه در نظر گرفت. این موضوع را می‌توان در شکل (۳-۴) مشاهده نمود.

<sup>۱</sup> - Capacitance

<sup>۲</sup> - Farad

<sup>۳</sup> - Elastance



شکل (۴-۳): مدار معادل یک خازن با وجود ولتاژ اولیه

پارامترهای دیگری که باید برای عنصر خازن بیان کنیم، توان و انرژی الکتریکی در خازن خطی تغییرناپذیر با زمان است. عبور بار الکتریکی در خازن از ولتاژ بالاتر به ولتاژ پایین‌تر، یا از صفحه مثبت به صفحه منفی، حکایت از آن دارد که بخشی از انرژی الکتریکی مدار می‌تواند در این عنصر، ذخیره شود. توان الکتریکی تحویلی به این خازن را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

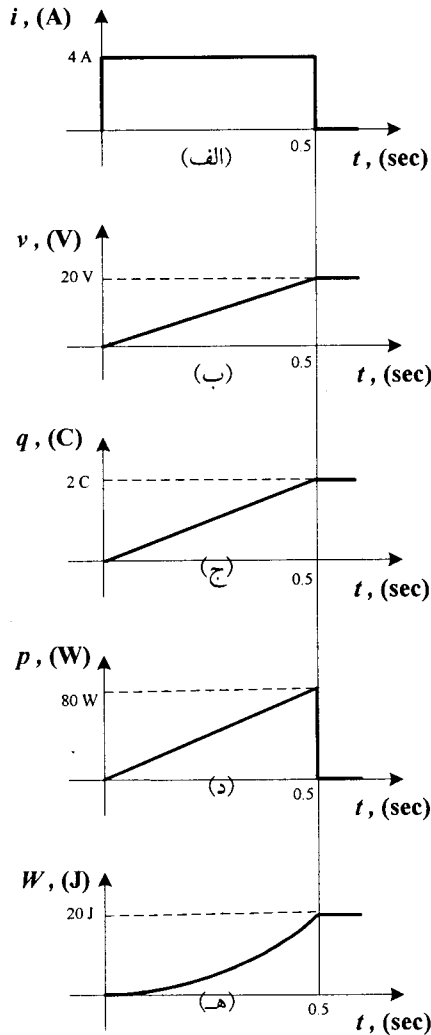
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = C \cdot v(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{W} \quad (4-5)$$

همچنین انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن برابر است با:

$$w(t) = \int p(t) dt = \int C \cdot v(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad \text{J} \quad (4-6)$$

پس می‌توان گفت که انرژی ذخیره شده در خازن، تنها به مقدار ولتاژ دو سر آن بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن ولتاژ، هیچ ربطی ندارد. لذا این انرژی، با کم شدن ولتاژ تا صفر، دوباره به مدار الکتریکی بر می‌گردد. یعنی اگر دو صفحه خازن مذکور از طریق یک مقاومت، به هم متصل شود، تا زمانی که انرژی ذخیره شده به طور کامل به صورت گرما و تلفات حرارتی در مقاومت ظاهر نشود، جریان الکتریکی در مدار برقرار خواهد بود. در این صورت، خازن همانند یک منبع ولتاژ عمل کرده و در مدار مورد نظر، یک جریان الکتریکی به راه می‌اندازد. افت ولتاژ روی مقاومت، باعث کاهش ولتاژ خازنی تا رسیدن ولتاژ به صفر می‌شود.

**مثال (۴-۱):** یک خازن الکتریکی با ظرفیت خازنی  $0.1 \text{ F}$  را در نظر بگیرید که به آن، یک جریان الکتریکی به صورت پالس و مطابق با شکل (۴-۴) اعمال می‌گردد. این جریان در مدت زمان از صفر تا  $0.5 \text{ sec}$  برابر  $4 \text{ A}$  بوده و پس از آن به مقدار صفر می‌رسد. برای این خازن، شکل موج ولتاژ  $v(t)$ ، بار  $q(t)$ ، توان  $p(t)$  و انرژی ذخیره شده  $w(t)$  را برحسب زمان رسم کنید.

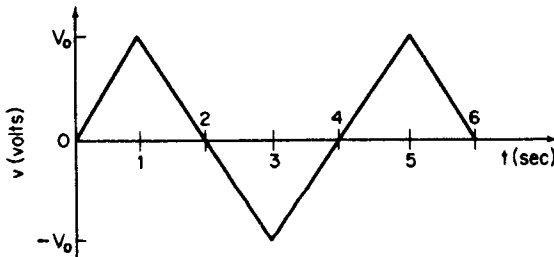


شکل (۴-۴): شکل موج‌های خازن مثال (۴-۱): (الف) جریان؛ (ب) ولتاژ؛ (ج) بار الکتریکی؛ (د) توان؛ (ه) انرژی ذخیره شده

حل: این منحنی‌ها را می‌توان در شکل‌های (۴-۴-ب) تا (۴-۴-ه) مشاهده نمود. مشخص است که ولتاژ الکتریکی از رابطه (۴-۴) با فرض  $v(0) = 0$  به دست می‌آید. به عبارت دیگر، با افزایش بار الکتریکی، ولتاژ دو سر خازن نیز زیاد می‌شود. همچنین بار الکتریکی که در شکل (۴-۴-ج) مشخص شده است، از رابطه  $q(t) = Cv(t)$  به دست

می‌آید. توان و انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن نیز از روابط (۴-۵) و (۴-۶) محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که پس از اتمام پالس جریان، بار الکتریکی بر روی صفحات خازن باقی می‌ماند؛ لذا ولتاژ دو سر خازن، ثابت می‌ماند ولی توان دریافتی صفر شده و انرژی الکتریکی ذخیره شده در آن به مقدار ثابتی می‌رسد. لازم به ذکر است که  $w(t)$  سطح زیر منحنی توان الکتریکی  $p(t)$  است و بنابراین، حداکثر انرژی ذخیره شده در خازن را می‌توان از سطح زیر منحنی  $p(t)$  به دست آورد که برابر  $\frac{80 \times 0.5}{2} = 20 \text{ J}$  می‌باشد. همچنین با توجه به آنکه تغییرات توان، خطی می‌باشد، لذا تغییرات انرژی الکتریکی نیز به صورت یک تابع سهمی شکل در می‌آید.

**تمرین (۴-۱):** شکل موج ولتاژ اعمالی به یک خازن الکتریکی با ظرفیت  $C$  فاراد به صورت موج ارانه شده در شکل (۴-۵) می‌باشد. شکل موج تغییرات جریان و بار عبوری از یک خازن را بیابید.



شکل (۴-۵): ولتاژ اعمالی به یک خازن

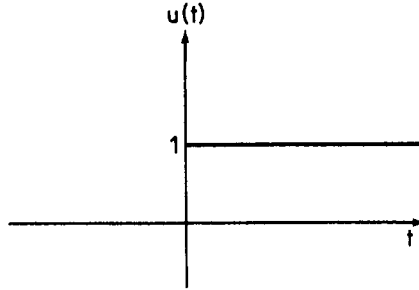
جواب: از روابط  $i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$  و  $q(t) = Cv(t)$  استفاده کنید.

#### ۴-۴- بعضی توابع زمانی مورد نیاز

در فصول دوم و سوم که مدارهای مقاومتی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم، متوجه شدیم که بین ولتاژ و جریان دو سر عناصر، یک وابستگی زمانی وجود دارد. این وابستگی به وسیله یک سری معادلات جبری ایجاد می‌شد. اما براساس روابط (۴-۳) و (۴-۴) برای یک خازن، می‌بینیم که این ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان به صورت توابع دیفرانسیلی و انتگرالی است. بنابراین باید با توابع زمانی مختلف و خصوصیات مشتقات و انتگرال‌های این توابع آشنا شویم تا در بخش بعدی بتوانیم شکل موج‌های متغیرهای ولتاژ و جریان یک خازن را در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار دهیم.

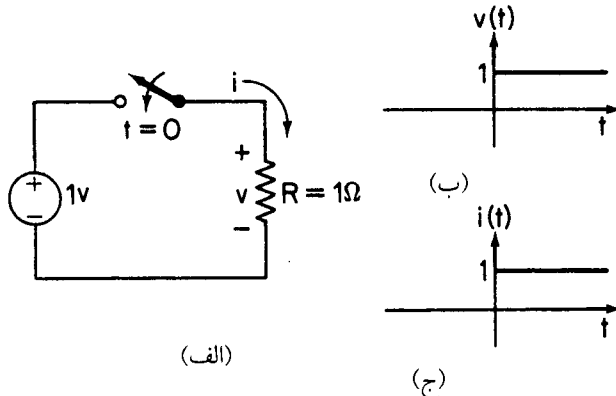
- تابع پله<sup>۱</sup>: یکی از مهم‌ترین توابع مورد استفاده در مدارهای الکتریکی، تابع پله می‌باشد. این تابع که با  $u(t)$  نمایش داده می‌شود و در شکل (۴-۶) هم قابل مشاهده است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۷-۴)$$



شکل (۴-۶): تابع پله واحد

در لحظه  $t = 0$ ، مقدار این تابع را می‌توان صفر،  $1/2$  یا ۱ در نظر گرفت که در بحث ما، این موضوع اهمیتی ندارد. این تابع را می‌توان از نوع ولتاژی و یا جریانی، توسط یک کلید و یک مدار الکتریکی ساده مطابق شکل (۴-۷ الف) ایجاد نمود. براساس این شکل، اگر منبع ولتاژ به مقدار ۱V باشد و در زمان  $t = 0$  کلید در حالت وصل قرار گیرد، ولتاژ دو سر مقاومت در زمان  $t > 0$  برابر ۱V می‌شود و با توجه به مقدار مقاومت  $R = 1\Omega$ ، جریان ۱A از مقاومت عبور می‌کند که در شکل‌های (۴-۷ ب و ج) نشان داده شده است.



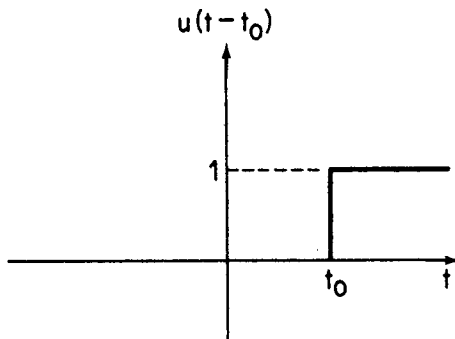
شکل (۴-۷): مدار ایجاد ولتاژ و جریان پله؛ ب و ج) شکل مشخصه آنان

<sup>۱</sup>- Step Function

حال فرض کنید که یک تابع ورودی پله واحد به اندازه  $t_0$  ثانیه به تأخیر افتد؛ در نتیجه مقدار شکل موج تابع در زمان  $t$  دارای دامنه‌ای برابر  $u(t-t_0)$  خواهد بود. به عبارت دیگر، می‌توان نوشت:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t-t_0 < 0 \\ 1 & t-t_0 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (۸-۴)$$

که این تابع پله با زمان تأخیری  $t_0$  ثانیه (یعنی  $u(t-t_0)$ ) را می‌توان در شکل (۸-۴) مشاهده نمود.



شکل (۸-۴): تابع پله با تأخیر زمانی  $t_0$

- تابع پالس: در بسیاری از مدارهای الکتریکی، از تابعی چهار گوش به نام تابع پالس<sup>۱</sup>  $u_{\Delta}(t)$  استفاده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

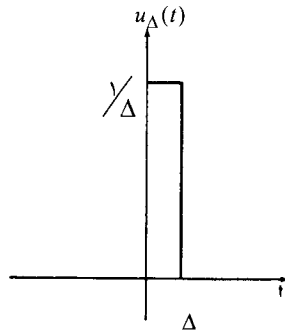
$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases} \quad (۹-۴)$$

همان‌گونه که در شکل (۹-۴) مشخص است، این تابع، پالسی به ارتفاع  $\frac{1}{\Delta}$  و عرض  $\Delta$  می‌باشد که از لحظه  $t=0$  شروع شده و در زمان  $t=\Delta$  خاتمه می‌یابد و سطح زیر منحنی این تابع برابر مقدار واحد است. تابع پالس را می‌توان از دو تابع پله به صورت زیر تشکیل داد:

$$u_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta} \quad (۱۰-۴)$$

<sup>۱</sup> - Pulse Function

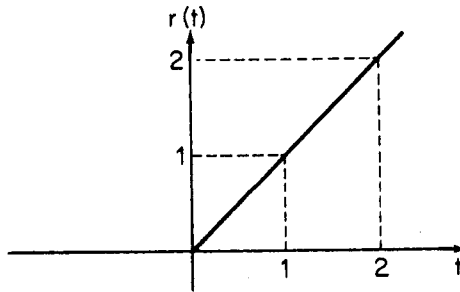




شکل (۹-۴): تابع پالس

- تابع شیب: یک تابع شیب<sup>۱</sup> واحد  $r(t)$ ، در زمان  $t=0$  شروع شده و با گذشت زمان، مقدار آن نیز به همان نسبت افزایش می‌یابد که این تابع در شکل (۱۰-۴) مشخص شده است. این تابع را برحسب تابع پله واحد می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$r(t) = t \cdot u(t) \quad (۱۱-۴)$$



شکل (۱۰-۴): نحوه تغییرات تابع شیب واحد

شکل دیگر نمایش تابع شیب واحد را می‌توان به صورت انتگرال یک تابع پله در نظر گرفت. یعنی؛

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (۱۲-۴)$$

و یا

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

<sup>۱</sup>- Ramp Function

- تابع ضربه: برای تشکیل یک تابع ضربه<sup>۱</sup> فرض کنید که در تابع پالس، عرض پالس به سمت صفر میل کرده و در عوض، دامنه آن به سمت بینهایت میل کند که در نتیجه، تابع پالس به سمت تابع ضربه میل می‌کند (البته در مفهوم دقیق ریاضی، این منحنی، یک تابع نخواهد بود). این تابع ضربه که با  $\delta(t)$  مشخص می‌گردد، به شکل زیر تعریف می‌شود:

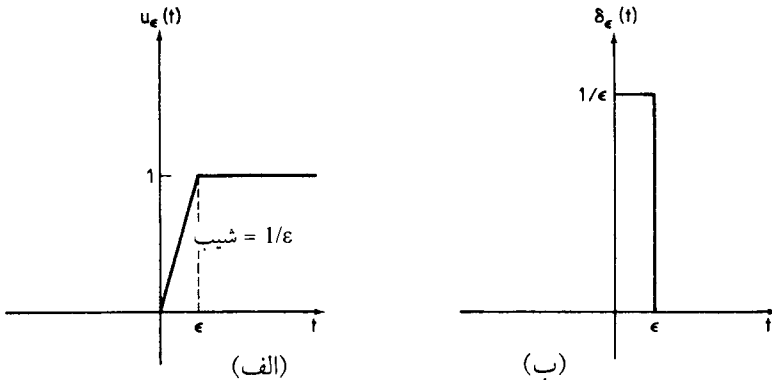
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases} \quad (۱۳-۴)$$

که ویژگی این تابع در زمان  $t=0$  به گونه‌ای است که برای هر مقدار  $\epsilon > 0$  و خیلی کوچک می‌توان نوشت:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (۱۴-۴)$$

رابطه (۱۴-۴) را می‌توان با استفاده از تابع پالسی که سطح زیر آن، همواره برابر ۱ است نیز تعریف نمود.

برای درک بهتر این موضوع اگر تابع پله واحد را مطابق شکل (۴-۱۱-الف) تعریف کنیم، آنگاه تابع ضربه، معادل شکل (۴-۱۱-ب) خواهد بود که در آن، رابطه (۴-۱۴) صادق است.



شکل (۴-۱۱): تقریبی از تابع پله و تابع ضربه: الف) تابع پله؛ ب) تابع ضربه

اکنون از تعریف تابع پله و تابع ضربه می‌توان نتیجه گرفت که،

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (۱۵-۴)$$

و یا،

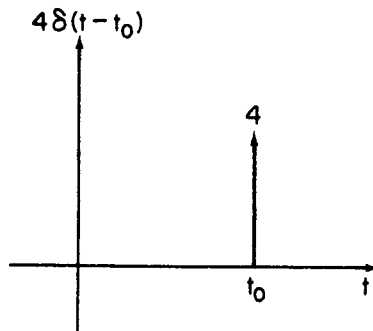
<sup>۱</sup> - Impulse Function

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (۱۶-۴)$$

دو معادله اخیر بسیار مهم هستند و در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده زیادی می‌شود. لازم به ذکر است که نمایش تابع ضربه  $k \cdot \delta(t-t_0)$ ، تابعی است که در  $t=t_0$ ، دارای سطح زیر منحنی به مقدار  $k$  می‌باشد. یعنی:

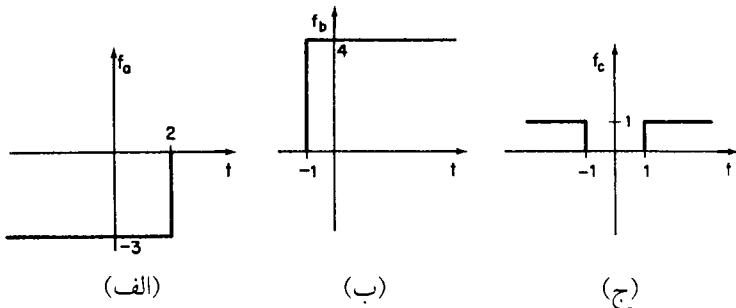
$$k \times \delta(t-t_0) = k \frac{d}{dt} u(t-t_0) \quad (۱۷-۴)$$

به عنوان نمونه در شکل (۱۲-۴) شکل تابع ضربه  $۴ \times \delta(t-t_0)$  رسم شده است.



شکل (۱۲-۴): تابع ضربه با دامنه ۴ و تأخیر  $t=t_0$

تمرین (۲-۴): بیان ریاضی شکل موج‌های ارائه شده در شکل (۱۳-۴) را مشخص نمایید.



شکل (۱۳-۴): بعضی توابع ریاضی

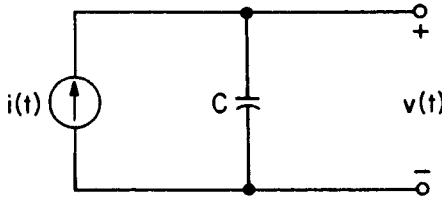
جواب: الف)  $f_a(t) = -3u(-t+2)$  ، ب)  $f_b(t) = 4u(t+1)$  ،

ج)  $f_c(t) = u(t-1) + u(-t-1)$

#### ۴-۵- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک خازن الکتریکی

در این بخش، می‌خواهیم اثرات تحریک یک خازن را در شکل موج‌های ولتاژ و جریان دو سر آن بررسی کنیم. این موضوع براساس توابع ارائه‌شده در بخش قبل می‌باشد. بدین منظور و مطابق با شکل (۴-۱۴) فرض کنید که یک خازن با یک منبع جریان  $i(t)$  تغذیه شود. مقدار ولتاژ اندازه‌گیری شده دو سر خازن از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0) \quad t > 0 \quad (4-18)$$



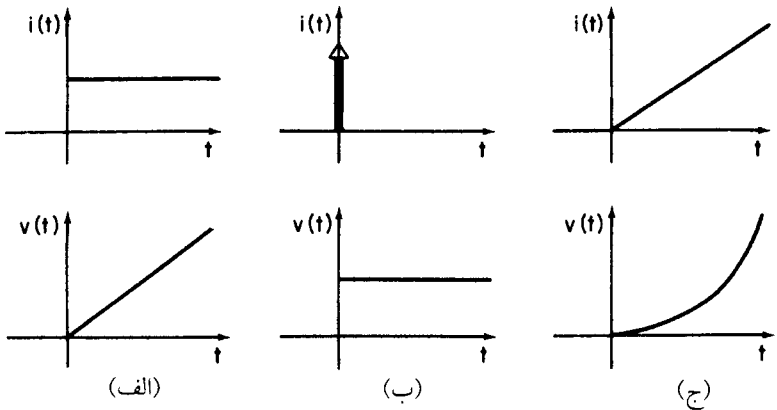
شکل (۴-۱۴): تحریک یک خازن با منبع جریان

این رابطه بیان می‌کند که اگر ورودی  $i(t)$ ، یک جریان به شکل تابع پله باشد، ولتاژ دو سر خازن به صورت یک تابع شیب به اضافه ولتاژ اولیه  $v(0)$  خواهد بود. به عبارت دیگر، قبل از اعمال جریان، ولتاژ دو سر خازن برابر  $v(0)$  خواهد بود. به همین دلیل به  $v(0)$ ، شرط اولیه (حالت اولیه) متغیر ولتاژ دو سر خازن می‌نامیم. اگر این ولتاژ اولیه برابر صفر باشد، آنگاه با اعمال جریان ثابت به شکل تابع پله، ولتاژ خروجی مطابق شکل (۴-۱۵-الف)، به صورت یک تابع شیب خواهد بود. همچنین اگر منبع جریان به صورت یک تابع ضربه باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن مطابق شکل (۴-۱۵-ب) به صورت یک تابع پله است و اگر منبع جریان به صورت یک تابع شیب باشد، ولتاژ به شکل یک تابع سهموی است که در شکل (۴-۱۵-ج) نشان داده شده است. این منحنی‌ها نشان می‌دهد که رابطه  $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$  در این سه حالت، صادق می‌باشد.

از منحنی‌های ارائه شده در شکل (۴-۱۵) درمی‌یابیم که برای اینکه شکل موج ولتاژ دو سر خازن به صورت یک تابع گسسته باشد (در حالت ب از شکل)؛ به گونه‌ای که مشتق آن با یک دامنه نامحدود باشد، باید منبع جریان به صورت یک تابع ضربه باشد. این موضوع، یک شرط بسیار مهم را در شکل موج ولتاژ دو سر خازن ارائه می‌کند که در زیر بیان می‌گردد:

شرط پیوستگی<sup>۱</sup> برای خازن‌ها: با توجه به آنکه در عمل نمی‌توان یک جریان ضربه ایجاد

<sup>۱</sup>- Continuity Condition



شکل (۴-۱۵): شکل موج‌های ولتاژ دو سر خازن با منابع جریان مختلف: الف) منبع جریان پله؛ ب) منبع جریان ضربه؛ ج) منبع جریان شیب

نمود، لذا ولتاژ ظاهر شده در دو سر یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت یک تابع پیوسته است و نمی‌تواند دارای گسستگی باشد. به عبارت دیگر، تحت هیچ شرایطی، ولتاژ دو سر خازن به طور ناگهانی نمی‌تواند تغییر نماید.

این مطلب را می‌توان به شکل ریاضی هم بیان نمود. در صورتی که یک تابع  $f(t)$  در لحظه  $t = t_0$  پیوسته باشد، آنگاه با توجه به تعریف مقدار سمت چپ تابع یعنی  $f(t_0^-)$  و مقدار سمت راست تابع یعنی  $f(t_0^+)$  به صورت زیر

$$f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t), \quad t < t_0$$

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t), \quad t > t_0$$

می‌توان نوشت:

$$f(t_0^-) = f(t_0^+) = f(t_0)$$

حال برای یک خازن هم با توجه به پیوستگی ولتاژ دو سر آن در هر لحظه  $t_0$  داریم:

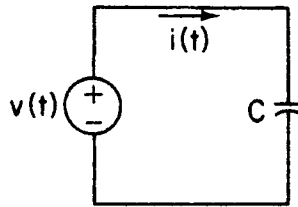
$$v_C(t_0^-) = v_C(t_0^+) = v_C(t_0)$$

در نتیجه، ولتاژ دو سر خازن در زمان  $t > t_0$ ، علاوه بر اینکه به ولتاژ اولیه خازن در  $t = t_0$  بستگی دارد، به مقدار جریان عبوری از خازن در زمان  $t > t_0$  نیز بستگی دارد؛ یعنی:

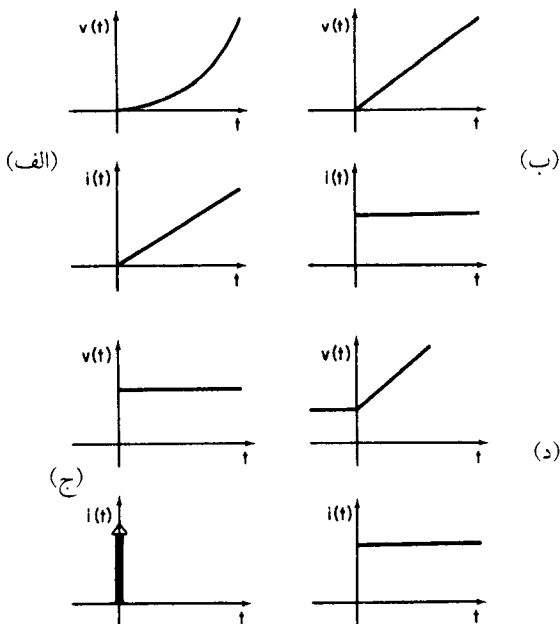
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (۴-۱۹)$$

که معمولاً در مدارهای الکتریکی، زمان اعمال منبع جریان را در زمان  $t = 0$  در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر،  $t_0 = 0$  می‌باشد.

این مطالب را می‌توان به شکل دیگری هم بیان نمود. فرض کنید که یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، با یک منبع  $v(t)$  تغذیه شود که در شکل (۴-۱۶) نشان داده شده است. حال برای آنکه جریان عبوری از خازن به صورت یک تابع شیب در آید، باید ولتاژ اعمالی به صورت شکل موج  $v(t) = t^2 u(t)$  باشد که این موضوع را می‌توان در شکل (۴-۱۷-الف) مشاهده نمود. همچنین برای ولتاژهای ورودی تابع شیب، تابع پله با حالت اولیه صفر در  $t < 0$ ، و تابع شیب با حالت اولیه ثابت غیر صفر در  $t < 0$  در شکل‌های (۴-۱۷-ب تا د) جریان ایجاد شده در خازن رسم شده است. از بین این حالت‌ها، ایجاد حالت (ج) از نظر عملی و واقعی غیرممکن است؛ زیرا هیچ موقع نمی‌توان یک جریان ضربه با دامنه نامحدود را ایجاد نمود.



شکل (۴-۱۶): یک خازن با تحریک توسط یک منبع ولتاژ

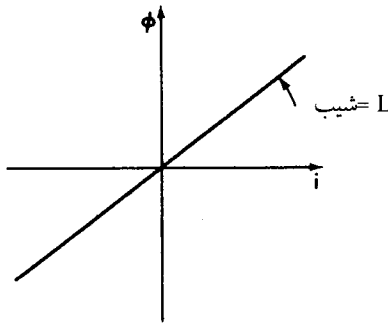


شکل (۴-۱۷): شکل موج‌های ولتاژ و جریان یک خازن با اعمال منابع ولتاژ مختلف

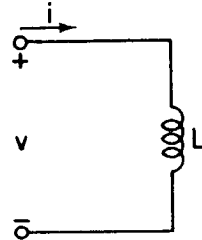
## ۴-۶- سلف‌ها

یکی دیگر از عناصری که کاربرد وسیعی در مدارهای الکتریکی دارند، سلف‌ها<sup>۱</sup> می‌باشند. یک سلف واقعی را می‌توان با پیچیدن یک سیم به شکل مارپیچی ایجاد نمود که برای افزایش ولتاژ دو سر سلف، یا باید جریان سیم‌پیچ را زیاد کرد و یا باید تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ را زیادتر نمود. نمایش این سلف را می‌توان به صورت شکل (۴-۱۸) در نظر گرفت.

به عبارت دیگر، بیان معادلی که می‌توان در تعریف یک عنصر دو سر به نام سلف بیان نمود، آن است که: عنصری که در هر لحظه از زمان  $t$ ، میان شار الکتریکی ایجاد شده  $\phi(t)$  توسط سلف و جریان عبوری  $i(t)$  از آن، رابطه‌ای در صفحه  $\phi-i$  داشته باشد، سلف گفته می‌شود. حال اگر این رابطه به صورت خطی باشد که از مبدأ صفحه  $\phi-i$  بگذرد، یک سلف خطی نامیده می‌شود که شکل (۴-۱۹)، یک سلف خطی را نشان می‌دهد. همچنین اگر این مشخصه با زمان نیز تغییر نکند، سلف خطی تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.



شکل (۴-۱۹): مشخصه یک سلف خطی



شکل (۴-۱۸): نمایش یک سلف

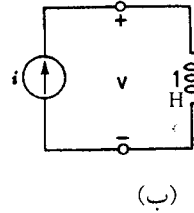
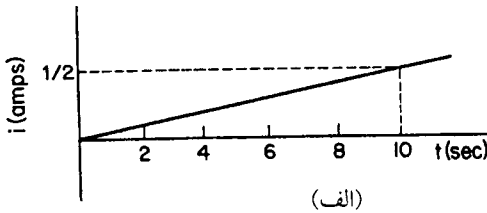
بر اساس تعریف مذکور در می‌یابیم که اگر از سلف، جریان  $i(t)$  عبور کند، شاری به مقدار  $\phi(t)$  توسط آن ایجاد می‌شود. بر اساس قانون القای فارادی، با تغییر شار ایجاد شده توسط سیم‌پیچ، ولتاژی در دو طرف آن ایجاد می‌شود. یعنی:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (۴-۲۰)$$

که در این رابطه،  $\phi(t)$  شار الکتریکی برحسب وبر-دور (Wb-turn) و  $v(t)$  ولتاژ الکتریکی برحسب ولت می‌باشد.

<sup>۱</sup>- Inductors

تمرین (۳-۴): در صورتی که جریان اعمالی به سلف ارائه شده در شکل (۴-۲۰-ب) مطابق شکل (۴-۲۰-الف) باشد، مطلوبست: الف) تغییرات متغیرهای  $q(t)$  و  $v(t)$  برای این سلف؛ ب)  $q(10)$ ؛ ج)  $\phi(10)$ ؛ د)  $v(10)$ .



شکل (۴-۲۰): جریان اعمالی به یک سلف

جواب: ب)  $q(10) = \frac{5}{2} C$ ؛ ج)  $\phi(10) = \frac{1}{2} \text{ Wb-turn}$ ؛ د)  $v(10) = \frac{1}{2} V$

### ۴-۷- سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

براساس شکل (۴-۱۹) و تعریفی که از یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان در بخش قبلی ارائه نمودیم، مشخصه این نوع سلف را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$\phi(t) = L \cdot i(t) \tag{۴-۲۱}$$

که در این رابطه،  $L$  اندوکتانس سلفی<sup>۱</sup> است که مستقل از زمان و جریان اعمالی می‌باشد. این اندوکتانس سلفی بیان می‌کند که با اعمال جریان الکتریکی مورد نظر به سلف و با توجه به مشخصات فیزیکی سلف، چه مقدار شار الکتریکی ایجاد می‌شود. این بدین معنی است که با اعمال جریان الکتریکی به سلف، در میدان مغناطیسی آن، مقداری انرژی ذخیره می‌شود. واحد اندوکتانس را هانری<sup>۲</sup> می‌نامیم و با علامت H نشان می‌دهیم.

با جایگزینی رابطه (۴-۲۱) در (۴-۲۰) و با در نظر گرفتن ثابت بودن اندوکتانس  $L$  داریم:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \tag{۴-۲۲}$$

حال اگر رابطه اخیر را از بازه صفر تا زمان  $t$ ، انتگرال گیری نماییم، می‌توان نوشت:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau \tag{۴-۲۳}$$

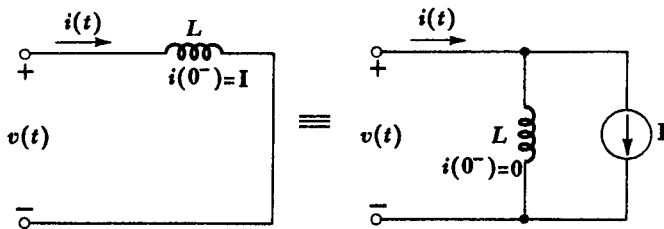
<sup>۱</sup>- Inductance

<sup>۲</sup>- Henry



که  $i(0)$  جریان اولیه سلف در زمان  $t=0$  است؛ به عبارت دیگر، قبل از ایجاد شار در سلف ناشی از عبور جریان الکتریکی از آن، مقدار شاری می‌تواند ناشی از پس ماند مغناطیسی موجود در سلف ایجاد شود که معادل این شار را با  $i(0)$  نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که در بسیاری از مواقع، به جای متغیر  $\frac{1}{L}$  از متغیر اندوکتانس معکوس<sup>۱</sup> استفاده می‌شود که با  $\Gamma$  نمایش می‌دهیم.

همچنین معادله (۴-۲۳) نشان می‌دهد که برای زمان  $t \geq 0$ ، جریان عبوری از یک سلف، از جمع جریان اولیه  $i(0)$  سلف در زمان  $t=0$ ، و جریان عبوری از سلف با اندوکتانس  $L$  و بدون جریان اولیه تشکیل شده است. بنابراین، هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه  $i(0)$  را می‌توان به صورت اتصال موازی یک منبع جریان با  $I = i(0)$  و یک سلف با اندوکتانس  $L$  و بدون جریان اولیه در نظر گرفت. این موضوع را می‌توان در شکل (۴-۲۱) مشاهده نمود.



شکل (۴-۲۱): مدار معادل یک سلف با وجود جریان اولیه

پارامترهای دیگری که باید برای عنصر سلف بیان کنیم، توان و انرژی الکتریکی در سلف خطی تغییرناپذیر با زمان است. توان الکتریکی تحویلی به این سلف را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{W} \quad (۴-۲۴)$$

همچنین انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف برابر است با:

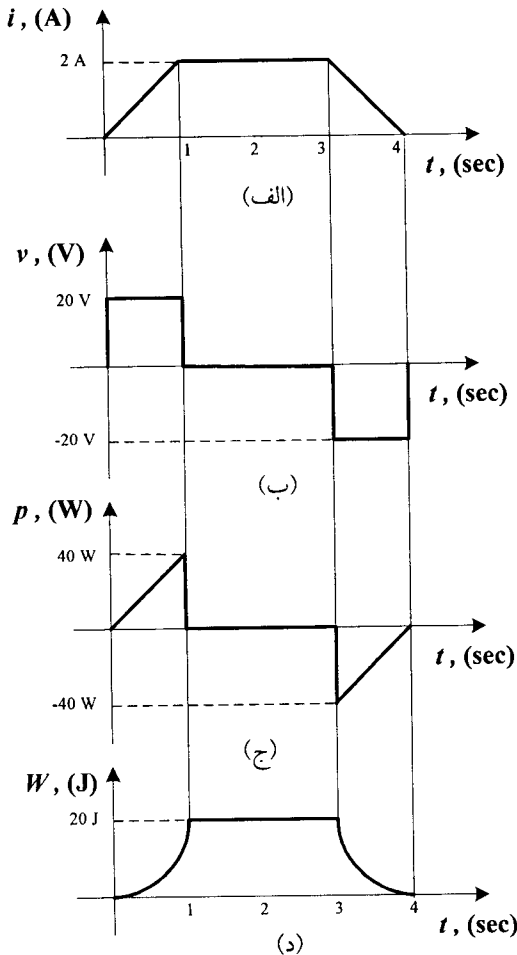
$$w(t) = \int p(t) dt = \int L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad \text{J} \quad (۴-۲۵)$$

پس انرژی ذخیره شده در سلف، تنها به مقدار جریان عبوری از سلف بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن جریان هیچ ربطی ندارد. این انرژی با کم شدن جریان تا صفر، دوباره به مدار بر می‌گردد. به عبارت دیگر، اگر در یک مدار القایی جریان دار، کلید مربوطه به طور ناگهانی باز شود، جریان به سرعت (اما نه به شکل آنی) کاهش خواهد یافت و لذا ولتاژ

<sup>۱</sup> - Reciprocal Inductance

نسبتاً بالایی بین دو اتصال کلید ظاهر خواهد شد که ممکن است به شکل قوس الکتریکی (جرقه بین دو کنتاکت کلید) ظاهر شود. این قوس الکتریکی، امکان اتلاف انرژی ذخیره شده در سلف را به صورت گرما در خود قوس و در مقاومت‌های مدار فراهم می‌سازد.

مثال (۲-۴): یک سلف با اندوکتانس سلفی  $10\text{H}$  را در نظر بگیرید که جریان الکتریکی اعمالی به آن مطابق شکل (۲-۴-الف) می‌باشد. برای این سلف، ولتاژ الکتریکی  $v(t)$ ، توان تحویلی به سلف  $p(t)$  و انرژی ذخیره شده در آن  $w(t)$  را برحسب زمان رسم کنید.



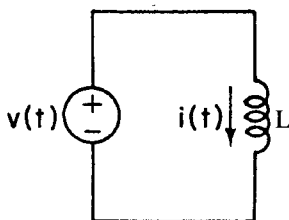
شکل (۲-۴): شکل موج‌های سلف مثال (۲-۴): الف) جریان؛ ب) ولتاژ؛ ج) توان الکتریکی؛ د) انرژی ذخیره شده

حل: این منحنی‌ها را می‌توان در شکل‌های (۴-۲۲-ب) تا (۴-۲۲-د) مشاهده نمود. شکل موج ولتاژ دو سر سلف را می‌توان با توجه به رابطه  $v(t) = L \frac{di}{dt}$  به دست آورد. از آنجا که مشتق هر تابع شیب، یک تابع پله است، لذا با تغییرات یکنواخت جریان عبوری، ولتاژ ثابتی در دو سر سلف ایجاد می‌شود و با ثابت شدن جریان عبوری از سلف، ولتاژ دو سر آن صفر می‌شود که در این حالت، توان انتقالی نیز صفر خواهد شد. از انتگرال‌گیری ترسیمی شکل موج توان، می‌توان انرژی ذخیره شده در سلف مذکور را به نمایش گذاشت که این موضوع در شکل (۴-۲۲-د) نشان داده شده است.

#### ۴-۸- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک سلف

مشابه عملکرد خازن در بخش (۴-۵)، می‌خواهیم اثرات تحریک سلف را در شکل موج‌های ولتاژ و جریان دو سر آن مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور مطابق با شکل (۴-۲۳) فرض کنید که یک سلف با یک منبع ولتاژ  $v(t)$  تغذیه شود. مقدار جریان اندازه‌گیری شده و عبوری از سلف از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

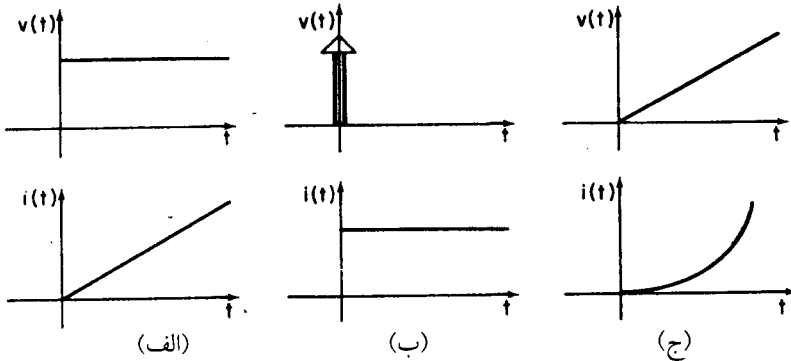
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0) \quad t > 0 \quad (۴-۲۶)$$



شکل (۴-۲۳): تحریک یک سلف با یک منبع ولتاژ

این رابطه بیان می‌کند که اگر ورودی  $v(t)$ ، یک ولتاژ به شکل تابع پله باشد، آنگاه جریان عبوری از سلف به صورت یک تابع شیب به اضافه یک جریان اولیه  $i(0)$  خواهد بود. به عبارت دیگر، قبل از اعمال تابع ولتاژ، جریان اولیه سلف، معادل با شار اولیه ایجاد شده توسط سلف است که به صورت پس ماند در آن ظهور می‌کند. به همین علت است که به شرط اولیه متغیر جریان عبوری از سلف می‌نامیم. اگر این جریان اولیه برابر صفر باشد، آنگاه با اعمال ولتاژ ثابت به شکل یک تابع پله، جریان خروجی مطابق با شکل (۴-۲۴-الف) به صورت یک تابع شیب خواهد بود. همچنین اگر منبع ولتاژ به صورت یک تابع ضربه باشد، شکل موج جریان عبوری از سلف مطابق با شکل (۴-۲۴-ب) به صورت

یک تابع پله است و اگر منبع ولتاژ به صورت یک تابع شیب باشد، جریان عبوری به شکل یک تابع سهموی است که در شکل (۴-۲۴-ج) نشان داده شده است. این منحنی‌ها نشان می‌دهد که رابطه  $v(t) = L di/dt$  در این سه حالت صادق می‌باشد.



شکل (۴-۲۴): شکل موج‌های جریان عبوری از سلف با منابع ولتاژ مختلف: (الف) منبع ولتاژ پله؛ (ب) منبع ولتاژ ضربه؛ (ج) منبع ولتاژ شیب

از منحنی‌های ارائه شده در شکل (۴-۲۴) در می‌یابیم که برای اینکه شکل موج جریان عبوری از سلف، به صورت یک تابع گسسته باشد (در حالت ب از شکل)، به گونه‌ای که مشتق آن با یک دامنه نامحدود باشد، باید منبع ولتاژ به صورت یک تابع ضربه باشد. این موضوع، یک شرط بسیار مهم را در شکل موج جریان عبوری از سلف ارائه می‌کند که در زیر بیان می‌گردد:

**شرط پیوستگی برای سلف‌ها:** با توجه به آنکه در عمل نمی‌توان یک ولتاژ ضربه ایجاد نمود، لذا جریان عبوری از سلف خطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت یک تابع پیوسته است و نمی‌تواند دارای گسستگی باشد. به عبارت دیگر، تحت هیچ شرایطی، جریان عبوری از سلف به‌طور ناگهانی نمی‌تواند تغییر نماید.

لذا برای یک سلف، با توجه به پیوستگی جریان عبوری از آن در هر لحظه  $t_0$  داریم:

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) = i_L(t_0) \quad (۴-۲۷)$$

به عبارت دیگر، اگر در زمان کلیدزنی برای یک سلف (که معمولاً زمان  $t = t_0$  در نظر می‌گیریم) یک ولتاژ به آن متصل شود، جریان سلف به‌طور ناگهانی و آنی نمی‌تواند تغییر کند؛ زیرا جریان عبوری از سلف به صورت یک متغیر پیوسته خواهد بود و تغییرات ناگهانی را شامل نمی‌شود.

## ۴-۹- ترکیب سری و موازی خازن‌ها و سلف‌ها

اکنون که با عناصر اساسی سلف و خازن در مدارهای الکتریکی آشنا شدیم، باید ببینیم که ترکیبات سلف‌ها و خازن‌ها را چگونه می‌توان به صورت سلف معادل و یا خازن معادل به نمایش گذاشت. مشابه عملکرد معادل سازی در مقاومت‌ها، استفاده از دو قانون اساسی کیرشهف (یعنی قانون KVL و KCL) در یافتن سلف معادل و خازن معادل الزامی است. در قسمت‌های زیر، این روند مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

## الف) اتصال سری خازن‌ها

فرض کنید که  $m$  خازن مطابق با شکل (۴-۲۵-الف) به طور سری با یکدیگر متصل شده‌اند که هر کدام از خازن‌ها مثلاً خازن  $k$  دارای ولتاژ اولیه  $v_k(o)$  می‌باشد. حال می‌خواهیم خازن معادل این  $m$  خازن را مطابق با شکل (۴-۲۵-ب) محاسبه نماییم. در صورتی که خازن‌ها، به صورت خطی تغییرناپذیر با زمان باشند آنگاه:

$$v_k(t) = v_k(o) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) d\tau \quad (۲۸-۴)$$

با به کار بردن قانون KCL در همه گره‌های اتصال خازن‌ها درمی‌یابیم که،

$$i_k(t) = i(t) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

به عبارت دیگر، بار انتقالی بر روی تمام صفحات خازن‌ها باید با یکدیگر برابر باشند. حال با استفاده از قانون KVL و استفاده از شکل (۴-۲۵-الف) می‌توان نوشت:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_m(t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \quad (۲۹-۴)$$

و در لحظه  $t = 0$  داریم:

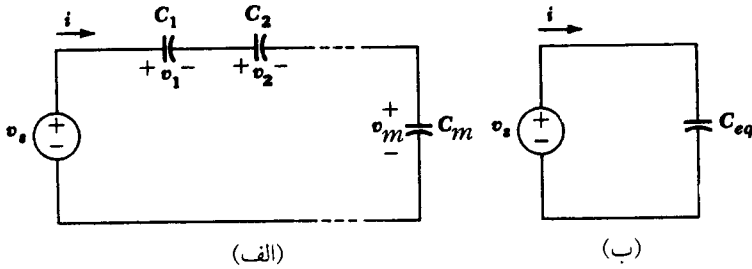
$$v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o) \quad (۳۰-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۲۸-۴) در رابطه (۲۹-۴)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$v(t) = v(o) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (۳۱-۴)$$

بنابراین، خازن معادل در شکل (۴-۲۵-ب) دارای خصوصیات زیر است:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k} \quad , \quad v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o) \quad (۳۲-۴)$$



شکل (۴-۲۵): اتصال سری خازن‌های خطی: الف) اتصال سری  $m$  خازن؛  
ب) خازن معادل

در نهایت، به طور خلاصه در می‌یابیم که اتصال سری  $m$  خازن که هر یک با ظرفیت خازنی  $C_k$  و ولتاژ اولیه  $v_k(0)$  است، معادل یک خازن خطی با ظرفیت  $C$  و با ولتاژ اولیه  $v(0)$  می‌باشد که این مقادیر، توسط روابط (۴-۳۲) به دست می‌آیند.  
در صورتی که به جای ظرفیت خازنی از الاستانس خازنی (یعنی  $S_k = 1/C_k$ ) استفاده کنیم، آنگاه معادله (۴-۳۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$S = \sum_{k=1}^m S_k, \quad v(0) = \sum_{k=1}^m v_k(0) \quad (۴-۳۳)$$

به عبارت دیگر، الاستانس خازن معادل ناشی از  $m$  خازن سری، برابر مجموع الاستانس  $m$  خازن سری می‌باشد. یعنی الاستانس خازن‌های سری، نقش مقاومت را در مقاومت‌های سری ایفا می‌کند.

### ب) اتصال موازی خازن‌ها

در اتصال موازی خازن‌ها، این فرض باید برقرار باشد که ولتاژ اولیه تمام آنها با یکدیگر مساوی باشد؛ زیرا در غیر این صورت، قانون KVL در لحظه  $t=0$  و در موازی کردن خازن‌ها نقض می‌شود. حال فرض کنید که  $m$  خازن به طور موازی مطابق شکل (۴-۲۶-الف) با هم متصل شده باشند. می‌خواهیم خصوصیات خازن معادل را مطابق شکل (۴-۲۶-ب) محاسبه کنیم. با استفاده از قانون KVL داریم:

$$v_1(t) = v_2(t) = \dots = v_m(t) \quad (۴-۳۴)$$

و با استفاده از قانون KCL می‌توان نوشت:

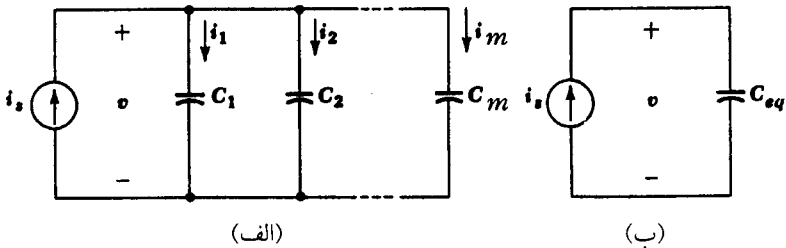
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_m(t) = \sum_{k=1}^m i_k(t) \quad (۴-۳۵)$$

با استفاده از رابطه (۳۴-۴) و جایگزینی در رابطه (۳۵-۴) داریم:

$$i(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \dots + C_m \frac{dv_m(t)}{dt} = \left( \sum_{k=1}^m C_k \right) \frac{dv(t)}{dt}$$

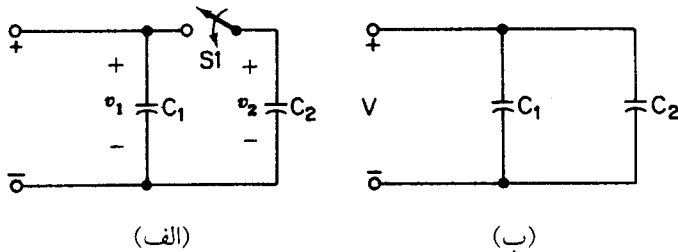
به عبارت دیگر، خازن معادل در شکل (۴-۲۶-ب) دارای خصوصیات زیر است:

$$C = \sum_{k=1}^m C_k \quad , \quad v(o) = v_k(o) \quad (۴-۳۶)$$



شکل (۴-۲۶): اتصال موازی خازن‌ها: (الف) اتصال موازی؛ (ب) خازن معادل

مثال (۴-۳): فرض کنید دو خازن با ظرفیت‌های  $C_1$  و  $C_2$  و ولتاژهای اولیه  $V_1$  و  $V_2$  مطابق شکل (۴-۲۷-الف) به هم متصل شوند. در لحظه کلیدزنی ( $t=0$ ) چه اتفاقی در مدار رخ می‌دهد؟



شکل (۴-۲۷): اتصال دو خازن به شکل موازی با ولتاژهای اولیه مخالف؛ (الف) قبل از وصل کلید؛ (ب) بعد از وصل کلید

حل: با وصل کلید در زمان  $t=0$ ، دو خازن با هم به شکل موازی و مطابق با شکل (۴-۲۷-ب) درمی‌آیند و لذا داریم:

$$C = C_1 + C_2 \quad (۴-۳۷)$$

در لحظه قبل از کلیدزنی (در زمان  $t=0^-$ ) بار ذخیره شده در دو خازن، برابر است با:

$$Q(o^-) = Q_1(o^-) + Q_2(o^-) = C_1 V_1 + C_2 V_2 \quad (۴-۳۸)$$

اما با توجه به اصل بقای انرژی، پس از کلیدزنی در زمان  $t = 0^+$ ، مجموع بار الکتریکی تغییر نمی‌کند. در نتیجه،

$$Q(o^+) = Q(o^-) \quad (39-4)$$

پس اگر فرض کنیم که ولتاژ جدید خازن‌ها پس از وصل کلید برابر  $V$  باشد و با استفاده از رابطه (38-4) و جایگزینی در رابطه (39-4) می‌توان نوشت:

$$CV = C_1V_1 + C_2V_2$$

در نتیجه،

$$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} \quad (40-4)$$

برای درک بهتر این موضوع فرض کنید که  $C_1 = C_2$  باشد و ولتاژ اولیه  $V_1 > V_2$  باشد؛ لذا در لحظه  $t = 0^-$ ، مقدار بار  $Q_1(o^-) > Q_2(o^-)$  است. در لحظه  $t = 0^+$  (که کلید بسته می‌شود) به‌طور لحظه‌ای مقداری بار از خازن اول به خازن دوم منتقل می‌شود تا در  $t = 0^+$ ، ولتاژ دو سر خازن، برابر هم شده و به مقدار  $V$  برسد که این مقدار از رابطه (40-4) به دست می‌آید.

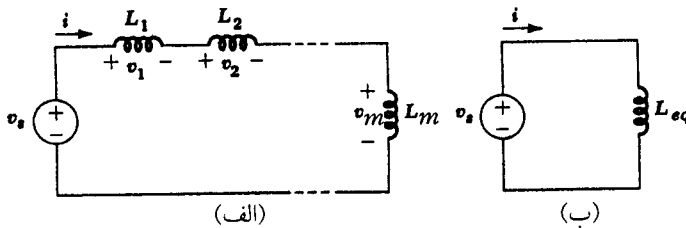
### ج) اتصال سری سلف‌ها

در صورتی که  $m$  سلف خطی تغییرناپذیر با زمان مطابق با شکل (4-28-الف) با هم به‌طور سری متصل شوند، می‌خواهیم سلف معادل آنها را مطابق با شکل (4-28-ب) محاسبه کنیم. بدین منظور با استفاده از قانون KCL داریم:

$$i = i_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (41-4)$$

و با استفاده از قانون KVL می‌توان نوشت:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_m = \sum_{k=1}^m v_k \quad (42-4)$$



شکل (4-28): اتصال سری سلف‌ها: (الف) اتصال سری؛ (ب) سلف معادل



اما با توجه به آنکه برای هر سلف  $k$  ام رابطه

$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt} = L_k \frac{di}{dt}$$

برقرار است، لذا با جایگزینی رابطه اخیر در رابطه (۴-۴۲) خواهیم داشت:

$$v = \sum_{k=1}^m L_k \frac{di}{dt} \quad (۴۳-۴)$$

با توجه به آنکه برای سری شدن سلف‌ها، باید جریان اولیه آنها با یکدیگر برابر باشند، لذا مشخصات سلف معادل را می‌توان به صورت روابط زیر بیان نمود:

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^m L_k \quad , \quad i(o) = i_k(o) \quad (۴۴-۴)$$

پس نتیجه می‌گیریم که اتصال سری  $m$  سلف با اندوکتانس  $L_k$  و جریان اولیه  $i(o)$  برای

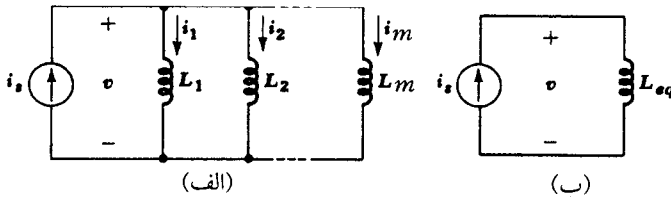
هر کدام، معادل یک سلف با اندوکتانس  $L_{eq} = \sum_{k=1}^m L_k$  با همان جریان اولیه  $i(o)$  است.

#### د) اتصال موازی سلف‌ها

برای اتصال موازی سلف‌ها مطابق شکل (۴-۲۹-الف) و با استفاده از قوانین KVL و

KCL به این نتیجه می‌رسیم که مشخصات سلف معادل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{L_k} \quad , \quad i(o) = \sum_{k=1}^m i_k(o) \quad (۴۵-۴)$$



شکل (۴-۲۹): اتصال موازی سلف‌ها: (الف) اتصال موازی؛ (ب) سلف معادل

لازم به ذکر است که مطابق تعریفی که برای اندوکتانس معکوس برای سلف‌ها تعریف نمودیم که،

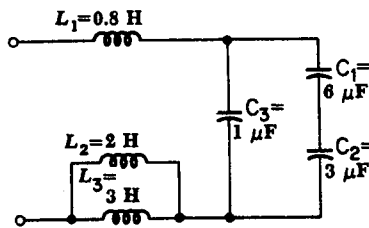
$$\Gamma_k = \frac{1}{L_k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

حال می‌توانیم رابطه (۴-۴۵) را براساس اندوکتانس معکوس معادل  $\Gamma_{eq}$  به صورت زیر تغییر داد:

$$\Gamma_{eq} = \sum_{k=1}^m \Gamma_k \quad , \quad i(o) = \sum_{k=1}^m i_k(o) \quad (۴-۴۶)$$

بنابراین اندوکتانس معکوس در سلف‌های موازی، نقش رسانایی  $G$  را برای مقاومت‌های موازی بازی می‌کند.

مثال (۴-۴): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۴-۳۰) را تا حد امکان ساده کنید.



شکل (۴-۳۰): یک شبکه LC

حل: در این مدار، ابتدا از خاصیت سری بودن خازن‌های  $C_1$  و  $C_2$  استفاده می‌کنیم که معادل این دو را با  $C_{12}$  نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2 \mu\text{F}$$

سپس خازن معادل  $C_{12}$  با خازن  $C_3$  موازی می‌شود. لذا خازن کل مدار برابر است با:

$$C_{eq} = C_{12} + C_3 = 2 + 1 = 3 \mu\text{F}$$

از طرف دیگر سلف‌های  $L_2$  و  $L_3$  با هم موازی می‌باشند که معادل آنها را به صورت  $L_{23}$  نشان داده و برابر خواهد بود با:

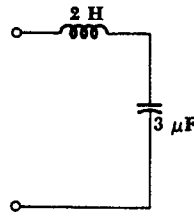
$$\frac{1}{L_{23}} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

$$L_{23} = \frac{L_2 \cdot L_3}{L_2 + L_3} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ H}$$

در نهایت، سلف  $L_{23}$  با  $L_1$  به طور سری قرار می‌گیرند. یعنی:

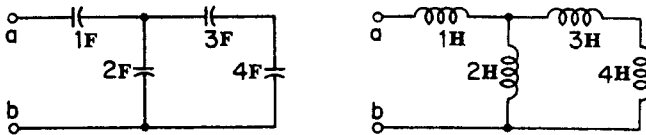
$$L_{eq} = L_{23} + L_1 = 1.2 + 0.8 = 2 \text{ H}$$

پس مدار معادل شکل (۴-۳۰) را می‌توان به صورت شکل (۴-۳۱) نشان داد.



شکل (۴-۳۱): مدار معادل شکل (۴-۳۰)

تمرین (۴-۴): دو مدار سلفی و خازنی ارائه شده در شکل (۴-۳۲) را ساده کنید.



شکل (۴-۳۲): دو مدار الکتریکی سلفی و خازنی

جواب:  $C_{eq} = 0.7878 \text{ F}$  ,  $L_{eq} = 2.555 \text{ H}$

#### ۴-۱۰-۱ اندوکتانس متقابل و ترانسفورماتور

در فصل‌ها و بخش‌های قبلی عناصر دو سر را بیان نمودیم که به وسیله روابطی که ولتاژ شاخه آنها را به جریان شاخه مربوط می‌سازد، مشخص شده‌اند. در این بخش می‌خواهیم سلف‌های تزویج شده<sup>۱</sup> و ترانسفورماتور ایده‌آل را بیان کنیم. تفاوت این عناصر با مقاومت، سلف و خازن در آن است که این عناصر، بیش از یک شاخه دارند و ولتاژ یک شاخه، به ولتاژها و جریان‌های شاخه‌های دیگر مربوط است. به همین علت، آنها را عناصر تزویج شونده<sup>۲</sup> می‌گویند.

#### ۴-۱۰-۱-۱ سلف‌های تزویج شده

برای شروع این بحث، مناسب است تا یک سیم‌پیچ را مطابق شکل (۴-۳۳) مورد بررسی قرار دهیم. در اینجا سیم‌پیچ را معادل یک عنصر سلف در نظر می‌گیریم. فرض

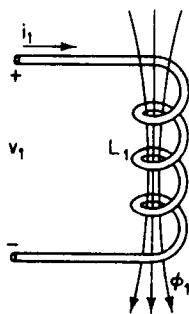
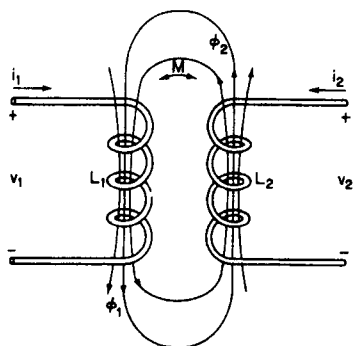
<sup>۱</sup>- Coupled Inductors

<sup>۲</sup>- Coupling Elements

کنید که جهت جریان و جهت پیچش سیمپیچ، مطابق شکل مذکور باشد که براساس قانون دست راست، جهت خطوط شار از بالای سیمپیچ به پایین آن است. قانون دست راست بیان می‌کند که اگر انگشتان دست راست را در جهت پیچش سیمپیچ و هم‌جهت با جریان عبوری از سیم، به دور آن، حلقه بزیم، آنگاه جهت شست دست، جهت شار درون سیمپیچ را مشخص می‌کند. برای شار این سیمپیچ می‌توان نوشت:

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) \quad (4-47)$$

که  $\phi_1(t)$  شار ارتباطی،  $i_1(t)$  جریان عبوری از سیمپیچ و  $L_1$  اندوکتانس آن است. حال اگر یک سیمپیچ دیگر در کنار سیمپیچ مذکور و مطابق با شکل (۴-۳۴) قرار دهیم، طرحواره یک جفت سلف تزویج شده ایجاد می‌شود (که به سیمپیچ‌های تزویج هم مشهور می‌باشند). در این حالت، جریان عبوری از سیمپیچ دوم نیز شاری ایجاد می‌کند که با سیمپیچ اول، ارتباط پیدا می‌کند. بنابراین، شار مغناطیسی  $\phi_1(t)$  در سیمپیچ اول ناشی از جریان سیمپیچ‌های اول و دوم (جریان‌های  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$ ) می‌باشد. به عبارت دیگر، داریم:



شکل (۴-۳۳): یک سیمپیچ منفرد      شکل (۴-۳۴): دو سیمپیچ تزویج شده

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \quad (4-48)$$

که  $L_1$  اندوکتانس خودی<sup>۱</sup> سیمپیچ ۱ و  $M_{12}$  اندوکتانس متقابل<sup>۲</sup> سیمپیچ دوم با سیمپیچ اول می‌باشد. واحد هر دو اندوکتانس بر حسب هنری می‌باشد. براساس قانون القای فارادی، تغییرات این شار بر حسب زمان، ولتاژی در دو سر سیمپیچ اول ایجاد می‌کند که برابر است با:

<sup>۱</sup> - Self Inductance

<sup>۲</sup> - Mutual Inductance

$$v_1(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (49-4)$$

همین مطالب را می‌توان برای سیم‌پیچ دوم بیان نمود. شار در برگرفته سیم‌پیچ دوم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\phi_1(t) = M_{21}i_1(t) + L_2i_2(t) \quad (50-4)$$

که  $L_2$  اندوکتانس خودی سیم‌پیچ دوم، و  $M_{21}$  اندوکتانس متقابل سیم‌پیچ اول با سیم‌پیچ دوم می‌باشد. در نتیجه، ولتاژ القایی در سیم‌پیچ دوم برابر خواهد بود با:

$$v_2(t) = \frac{d\phi_2(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (51-4)$$

معادلات (49-4) و (51-4)، ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سیم‌پیچ را با یکدیگر ارائه می‌دهد.

حال برای محاسبه میزان انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دو سیم‌پیچ، فرض می‌کنیم که  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  باشد؛ یعنی شارهای دو سیم‌پیچ در لحظه  $t=0$  برابر صفر می‌باشد. حال با اعمال جریان‌های الکتریکی  $i_1$  و  $i_2$  با توجه به اینکه  $M_{12} = M_{21} = M$  می‌باشد، لذا انرژی تزریقی به دو سیم‌پیچ از انتگرال توان انتقالی به دو سیم‌پیچ بدست می‌آید که:

$$w(i_1, i_2) = \int_0^t [v_1(\tau)i_1(\tau) + v_2(\tau)i_2(\tau)] d\tau$$

با جایگذاری رابطه‌های (49-4) و (51-4) در رابطه اخیر داریم:

$$w(i_1, i_2) = \int_0^t \left[ L_1 i_1 \frac{di_1}{d\tau} + M \left( i_1 \frac{di_2}{d\tau} + i_2 \frac{di_1}{d\tau} \right) + L_2 i_2 \frac{di_2}{d\tau} \right] d\tau \quad (52-4)$$

$$= \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$$

$$w(i_1, i_2) = w(i_1, 0) + M i_1(t) i_2(t) + w(0, i_2) \quad (53-4)$$

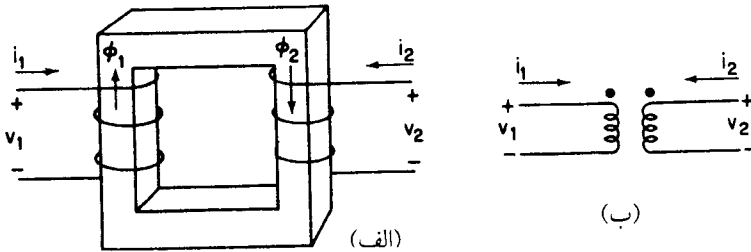
که جمله اول در رابطه (53-4) انرژی ذخیره شده در حالتی است که  $i_2 = 0$  و برقراری جریان  $i_1$  در سیم‌پیچ اول باشد. همچنین  $w(0, i_2)$  با  $i_1 = 0$  و اعمال  $i_2$  به سیم‌پیچ دوم می‌باشد. جمله  $M i_1 i_2$  هم انرژی مربوط به تزویج بین دو سیم‌پیچ اول و دوم می‌باشد که با توجه به مثبت یا منفی بودن  $M$ ، علامت آن نیز تغییر می‌کند.

مسئله مهمی که در مورد سیم‌پیچ‌های (سلف‌های) تزویج وجود دارد، علامت ضریب القاء متقابل ( $M$ ) می‌باشد. علامت  $M$  را تنها می‌توان با در نظر گرفتن دقیق وضعیت فیزیکی سیم‌پیچ‌ها و جهات قراردادی متغیرها تعیین نمود. برای این منظور فرض کنید که  $i_2 = 0$  باشد. در نتیجه،

$$\phi_2(t) = M \cdot i_1(t)$$

$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

حال اگر یک جریان افزایشی مطابق شکل (۴-۳۵-الف) وارد سیم‌پیچ اول شود، در این صورت  $\frac{di_1}{dt} > 0$  بوده و چون  $v_2 = M \frac{di_1}{dt}$  است، لذا علامت  $v_2(t)$  با علامت  $M$ ، یکسان می‌باشد. در شرایطی که پتانسیل سر بالایی سیم‌پیچ دوم از سر پایینی آن بیشتر باشد آنگاه  $v_2 > 0$  خواهد بود و بالطبع باید  $M > 0$  باشد. پس علامت  $M$ ، هم به وضع فیزیکی سیم‌پیچ‌ها و هم به جهات قراردادی انتخاب شده بستگی دارد که در شکل (۴-۳۵) به مقدار مثبت می‌باشد. پس در شکل (۴-۳۵-الف) اگر جریان دو سیم‌پیچ از سرهای بالایی وارد سیم‌پیچ‌ها شوند و جهت قراردادی ولتاژ و جریان سیم‌پیچ‌ها هم مطابق شکل باشد آنگاه  $M$ ، مثبت می‌باشد که این موضوع را با نقطه‌های توپر در بالای سیم‌پیچ‌ها نشان می‌دهیم.



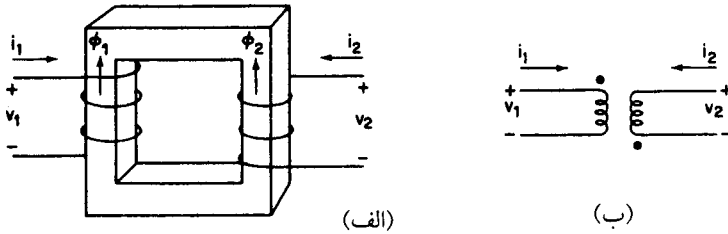
شکل (۴-۳۵): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل مثبت

برای تشخیص اثرات اندوکتانس متقابل منفی، شکل (۴-۳۶-الف) را در نظر بگیرید. در این شکل، اگر  $\frac{di_1}{dt}$  مثبت باشد آنگاه  $\frac{d\phi}{dt}$ ، مثبت می‌باشد و در نتیجه، ولتاژ  $v_1(t)$  ناشی از عبور جریان  $i_1$ ، به مقدار مثبتی خواهد بود. همچنین با به‌کار بردن قانون دست راست درمی‌یابیم که با اعمال جریان  $i_2$  به سیم‌پیچ دوم، اگر  $\frac{di_2}{dt}$ ، مثبت باشد آنگاه یک شار منفی  $\frac{d\phi}{dt}$  در سیم‌پیچ اول ایجاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اثر سیم‌پیچ دوم در سیم‌پیچ اول، منفی می‌باشد. حالت عکس این موضوع هم صادق می‌باشد؛ به این معنی که اثر جریان سیم‌پیچ اول (شار سیم‌پیچ اول) در سیم‌پیچ دوم، منفی می‌باشد. برای نشان دادن این موضوع، اندوکتانس متقابل بین این دو سیم‌پیچ را برابر یک مقدار منفی در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، در این دو سلف تزویج داریم:

$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$$

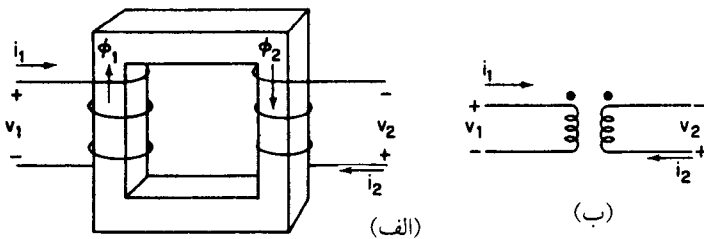
$$v_2(t) = -|M| \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

در شکل (۴-۳۶-ب) مدار الکتریکی دو سلف تزویج را با مقدار  $M$  منفی نشان می‌دهد. در این شکل، موقعیت نقاط توپر، بیانگر جهت واقعی سیم‌پیچ‌ها می‌باشد که در شکل (۴-۳۶-ب) یکی در بالا و دیگری در پایین است (چون جهت پیچش آنها با یکدیگر مخالف هم هستند). با استفاده از این نقاط توپر و جهت‌های قراردادی جریان‌های ورودی دو سیم‌پیچ می‌توان به قاعده‌ای دست یافت تا علامت  $M$  را تعیین نمود.



شکل (۴-۳۶): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل منفی

تعیین علامت  $M$  با استفاده از نقاط توپر: تخصیص نقاط توپر سیم‌پیچ‌ها با توجه به وضعیت فیزیکی سیم‌پیچ‌ها باید به‌گونه‌ای باشد که اگر جریان دو سیم‌پیچ از نقاط توپر وارد آنها شود، یک تزویج مثبتی را ایجاد کند و  $M$  مثبت باشد. حال اگر جهت جریان مشخص شده روی سیم‌پیچ‌ها از نقاط توپر وارد و یا خارج شوند، علامت  $M$  مثبت خواهد بود و اگر از یکی از سیم‌پیچ‌ها جریان از سر نقطه دار وارد سیم‌پیچ شود و از سیم‌پیچ دیگر، از سر نقطه دار خارج شود، علامت  $M$  منفی خواهد بود. برای درک بهتر این موضوع، شکل (۴-۳۷) را نگاه کنید که دارای یک  $M$  منفی است.



شکل (۴-۳۷): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل منفی

ضریب تزویج<sup>۱</sup>: در سلف‌های تزویج شده، ضرایب اندوکتانس  $L_1$  و  $L_2$  همیشه مثبت هستند ولی اندوکتانس متقابل  $M$ ، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. حال می‌توان گفت که

<sup>۱</sup>- Coefficient of Coupling

وضعیت دو سلف نسبت به یکدیگر، میزان تزویج بین آن دو را مشخص می‌کند. این مقدار توسط ضریب  $k$  مشخص می‌شود:

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (54-4)$$

این ضریب به آن معنا است که اگر دو سلف در فاصله زیادی نسبت به هم قرار داشته باشند، این ضریب، بسیار کوچک و نزدیک به صفر است. همچنین اگر دو سلف بر روی یک هسته پیچیده شده باشد به گونه‌ای که قسمت اعظم شار مغناطیسی از هسته بگذرد، ضریب  $k$  بسیار به عدد یک نزدیک است. برای نشان دادن این موضوع که ضریب  $k$  همیشه از عدد یک، کوچک‌تر یا مساوی است، می‌توان از انرژی ذخیره شده در سلف‌ها استفاده نمود. رابطه (۴-۵۲) که بیانگر انرژی ذخیره شده در دو سلف تزویج شده است را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$w(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left( i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \quad (55-4)$$

اما می‌دانیم که انرژی  $w(i_1, i_2)$  به ازای هر  $i_1$  و  $i_2$  برابر یک مقدار مثبت است. حال با توجه به آنکه جمله اول از رابطه (۴-۵۵) همیشه مثبت است، پس باید  $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$  نامنفی باشد. برای اثبات این موضوع، فرض کنید که  $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$  منفی باشد؛ آنگاه اگر  $i_1 = 0$  و  $i_2 = -\frac{M}{L_1}$  باشد آنگاه جمله اول برابر صفر شده و بالطبع  $w\left(0, -\frac{M}{L_1}\right)$  برابر یک عدد منفی خواهد شد که این موضوع، غیرممکن است. پس باید:

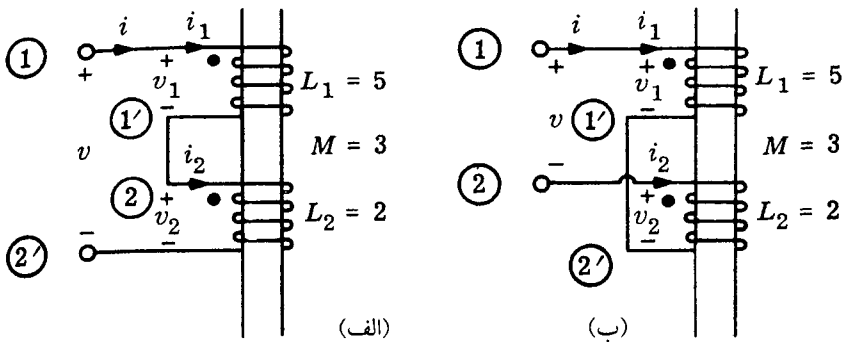
$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} \geq 0 \Rightarrow K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

**مثال (۴-۵):** شکل (۴-۳۸) دو سلف را در دو حالت سری نشان می‌دهد که با یکدیگر تزویج شده‌اند. در هر حالت، اندوکتانس سری کل مدار را بیابید.  
**حل:** ابتدا برای شکل (۴-۳۸-الف)، معادلات شار را براساس روابط (۴-۴۸) و (۴-۵۰) می‌نویسیم:

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = 5i_1 + 3i_2$$

$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = 3i_1 + 2i_2$$





شکل (۴-۳۸): اتصال سری سلف‌های تزویج شده

در این شکل، با توجه به اینکه جریان‌های  $i_1$  و  $i_2$  از سرهای نقطه‌دار وارد می‌شوند، پس ضریب القاء متقابل به مقدار مثبتی خواهد بود. اما با توجه به قانون KCL که  $i_1 = i_2 = i$  و قانون KVL که  $v = v_1 + v_2$  می‌باشد آنگاه داریم:

$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$$

اگر شارهای اولیه، صفر باشند، با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 8i_1 + 5i_2 = 13i$$

در نتیجه، اندوکتانس سری کل مدار برابر است با:

$$L = \frac{\phi}{i} = 13 \text{ H}$$

اکنون فرض کنید که این دو سلف به صورت شکل (۴-۳۸-ب) با هم تزویج شوند. در این حالت داریم:

$$i = i_1 = -i_2$$

$$v = v_1 - v_2 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2i_1 + i_2 = i$$

در نهایت، اندوکتانس سری کل مدار برابر است با:

$$L = \frac{\phi}{i} = 1 \text{ H}$$

## ۴-۱۰-۲- ترانسفورماتور ایده‌ال با دو سیم‌پیچ

ترانسفورماتور ایده‌ال با دو سیم‌پیچ، ساده‌ترین نوع نمایش سلف‌های تزویج شده می‌باشد. این ترانسفورماتور از پیچیدن دو سیم‌پیچ بر روی یک هسته مغناطیسی مشترک مطابق شکل (۴-۳۵-الف) به دست می‌آید؛ با این تفاوت که باید ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته، بینهایت باشد تا ترانسفورماتور به صورت یک ترانسفورماتور ایده‌ال، هیچ‌گونه انرژی تلفاتی نداشته باشد. به عبارت دیگر، رلوکتانس مغناطیسی<sup>۱</sup> هسته  $\mathcal{R}$  باید برابر صفر باشد؛ زیرا رلوکتانس مغناطیسی هسته با ضریب نفوذپذیری آن، نسبت عکس دارد (منظور از رلوکتانس مغناطیسی هسته، مقاومتی است که هسته در مقابل عبور شار مغناطیسی از خود نشان می‌دهد).

برای ساده‌سازی مسئله، فرض می‌کنیم که جریان‌های دو سیم‌پیچ اولیه و ثانویه ترانسفورماتور، مطابق شکل (۴-۳۵-الف) از سرهای نقطه دار وارد شوند تا  $M$  دارای مقدار مثبت باشد.

با فرض بینهایت بودن ضریب نفوذپذیری هسته به این نتیجه می‌رسیم که تمام شار مغناطیسی از داخل هسته عبور می‌کند و هیچ‌گونه شار نشتی وجود ندارد. لذا شاری که تک‌تک حلقه‌های سیم‌پیچ اول و دوم را قطع می‌کند، با یکدیگر برابر است. حال اگر  $\phi(t)$  را شار عبوری از هسته و  $n_1$  و  $n_2$  را بترتیب تعداد دور سیم‌پیچ‌های اول و دوم بنامیم، آنگاه شار کلی که سیم‌پیچ‌های اول و دوم در بر می‌گیرند، از حاصل ضرب تعداد دورهای مربوطه با شار عبوری از هسته به دست می‌آید. یعنی،

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= n_1 \phi(t) \\ \phi_2(t) &= n_2 \phi(t)\end{aligned}\quad (۴-۵۶)$$

با استفاده از قانون القای فارادی، ولتاژ ایجاد شده در دو سر هر سیم‌پیچ برابر است با:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \frac{d\phi_1(t)}{dt} = n_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{d\phi_2(t)}{dt} = n_2 \frac{d\phi(t)}{dt}\end{aligned}\quad (۴-۵۷)$$

آنگاه با تقسیم روابط اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}\quad (۴-۵۸)$$

<sup>۱</sup> - Magnetic Reluctance

اکنون به محاسبه  $\phi(t)$  برحسب نیروی محرکه مغناطیسی<sup>۱</sup> (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی  $\mathcal{R}$  می‌پردازیم. مشابه قانون اهم در یک مقاومت خطی، مقدار نیروی محرکه مغناطیسی را می‌توان از حاصل ضرب رلوکتانس مغناطیسی در شار عبوری به دست آورد. یعنی:

$$\text{mmf} = \mathcal{R} \cdot \phi(t) \quad (۵۹-۴)$$

با توجه به فرض اولیه که جریان‌های ورودی به سیم‌پیچ‌ها را از نقاط توپر سیم‌پیچ در نظر گرفتیم، لذا mmf کل دو سیم‌پیچ از حاصل ضرب آمپر دورهای هر سیم‌پیچ و جمع آنها با هم حاصل می‌شود. یعنی،

$$\text{mmf} = n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = \mathcal{R} \cdot \phi(t)$$

و با در نظر گرفتن این نکته که برای هسته،  $\mathcal{R} = 0$  است، لذا خواهیم داشت:

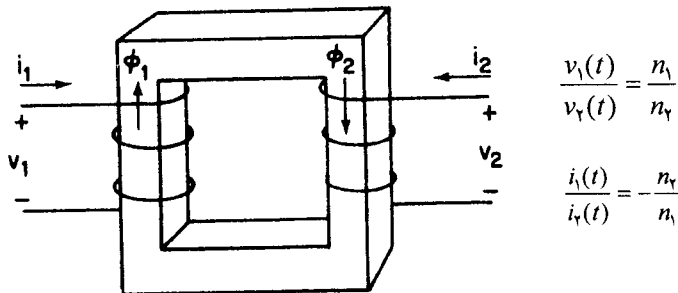
$$n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = 0$$

و در نهایت:

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (۶۰-۴)$$

معادلات (۴-۵۸) و (۴-۶۰)، مشخص کننده روابط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سیم‌پیچ یک ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد که به‌طور خلاصه می‌توان در شکل (۴-۳۹) مشاهده نمود. همچنین از این دو رابطه ترانسفورماتور درمی‌یابیم که،

$$v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = 0 \quad (۶۱-۴)$$



شکل (۴-۳۹): ترانسفورماتور ایده‌آل و روابط اساسی آن

به عبارت دیگر، در تمام لحظات، مجموع توان ورودی به دو سیم‌پیچ با هم برابر صفر می‌باشد؛ یعنی هیچ‌گونه انرژی در آن ذخیره نمی‌شود و هیچ انرژی هم تلف نمی‌گردد.

<sup>۱</sup> - Magnetomotive Force

به عبارت دیگر، مقدار توان ورودی به ترانسفورماتور از یک سیم پیچ با توان خروجی از سیم پیچ دیگر دقیقاً برابر است. پس ترانسفورماتور ایده‌ال، یک عنصر بی‌اتلاف و بدون ذخیره انرژی است. همچنین در این ترانسفورماتورها، ضریب توزیع برابر واحد می‌باشد.

#### ۴-۱۱- خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل، با عناصر سلف و خازن و خصوصیت‌های آنان آشنا شدیم که خلاصه مطالب این فصل را می‌توان به صورت زیر اشاره نمود:

- در مورد عنصر خازن به این نتیجه رسیدیم که بین جریان و ولتاژ آن، ارتباط زیر برقرار است:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = v(o) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

- همچنین در مورد عنصر سلف هم بیان نمودیم که جریان و ولتاژ دو سر سلف با هم دارای ارتباط زیر هستند:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = i(o) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- سلف‌ها و خازن‌ها از عناصر پسیو به کار رفته در مدارهای الکتریکی هستند که سری و موازی کردن آنها دارای اندوکتانس و ظرفیت خازنی معادلی خواهند بود که به طور خلاصه می‌توان در جدول (۴-۱) مشاهده نمود.

جدول (۴-۱): اتصالات سری و موازی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها

نوع عنصر	مقدار عناصر	واحدهای عناصر	مقدار کل در اتصال سری	مقدار کل در اتصال موازی
مقاومت	$R_i$ $G_i$	اهم مهو	$R_{eq} = \sum R_i$	$G_{eq} = \sum G_i$
خازن	$C_i$ $S_i$	فاراد داراف	$S_{eq} = \sum S_i$	$C_{eq} = \sum C_i$
سلف	$L_i$ $\Gamma_i$	هانری هانری معکوس	$L_{eq} = \sum L_i$	$\Gamma_{eq} = \sum \Gamma_i$

- در انتهای این فصل هم در مورد سلف‌های تزویج صحبت کردیم. معادلاتی که یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییرناپذیر با زمان را تعریف می‌کند عبارت بودند از:

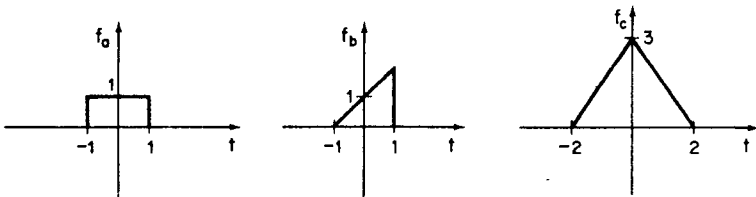
$$v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

- که علامت  $M$  به مشخصات فیزیکی سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه ترانسفورماتور و جهات قراردادی متغیرهای سیم‌پیچ‌ها بستگی دارد که می‌تواند مقداری مثبت یا منفی باشد.
- یک ترانسفورماتور ایده‌آل را می‌توان یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییرناپذیر با زمان با ضرایب خود القاء بینهایت و ضریب تزویج یک در نظر گرفت.

#### ۴-۱۲- مسائل مروری

- ۱- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی که به صورت  $w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt$  می‌باشد، ثابت کنید که انرژی ذخیره‌شده در یک خازن خطی برابر  $w(t) = \frac{1}{2} q^2(t)/C$  خواهد بود.
- ۲- بیان ریاضی شکل موج‌های ارائه شده در شکل (۴-۴۰) را مشخص نمایید.

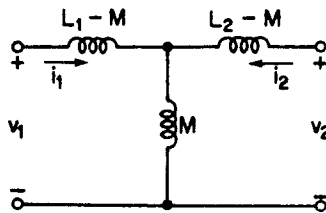


شکل (۴-۴۰): بعضی توابع ریاضی

- ۳- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی  $w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt$  اثبات کنید که انرژی ذخیره شده در یک سلف خطی برابر  $w(t) = \frac{1}{2} \phi^2(t)/L$  خواهد بود.
- ۴- فرض کنید که سه خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت‌های ۱، ۲ و ۳ میکروفاراد، به‌طور جداگانه دارای ولتاژهای اولیه‌ای بترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ ولت می‌باشند. حال اگر این سه خازن با هم و به‌طور همزمان به‌صورت موازی وصل شوند، ولتاژ حاصل دو سر اتصال موازی چقدر خواهد بود؟ انرژی ذخیره شده در خازن‌ها را قبل و بعد از اتصال موازی به‌دست می‌آورید.

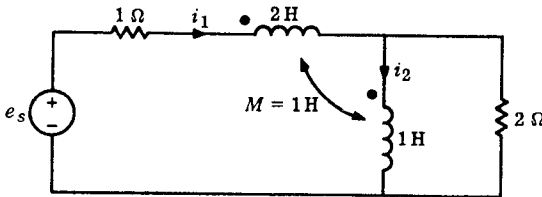
۵- فرض کنید که دو سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس‌های ۱ و ۲ هانری، به‌طور جداگانه دارای جریان‌های اولیه‌ای بترتیب برابر ۲ و ۱ آمپر می‌باشند. حال اگر این سلف‌ها با هم و به‌طور همزمان به‌طور سری وصل شوند، جریان متوجه عبوری از اتصال سری آنها چقدر است؟ انرژی مغناطیسی در این دو سلف را قبل و بعد از سری شدن محاسبه کنید.

۶- در صورتی که دو سلف تزویج شده داشته باشیم که اندوکتانس خودی سیم‌پیچ‌های اول و دوم برابر  $L_1$  و  $L_2$  و اندوکتانس متقابل آنها برابر  $M$  باشد، ثابت کنید که مدار معادل الکتریکی این دو سلف تزویج شده به‌صورت شکل (۴-۴۱) خواهد بود.



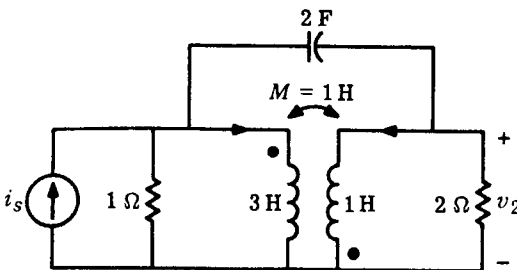
شکل (۴-۴۱): مدار معادل الکتریکی دو سلف تزویج شده

۷- در مدار ارائه‌شده در شکل (۴-۴۲)، معادلات حلقه را با استفاده از قانون KVL بیابید.



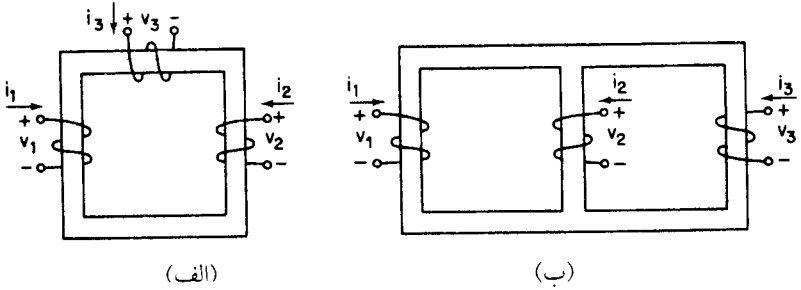
شکل (۴-۴۲): مدار الکتریکی با سلف‌های تزویج

۸- در مدار ارائه‌شده در شکل (۴-۴۳)، معادلات گره را با استفاده از قانون KCL بیابید.



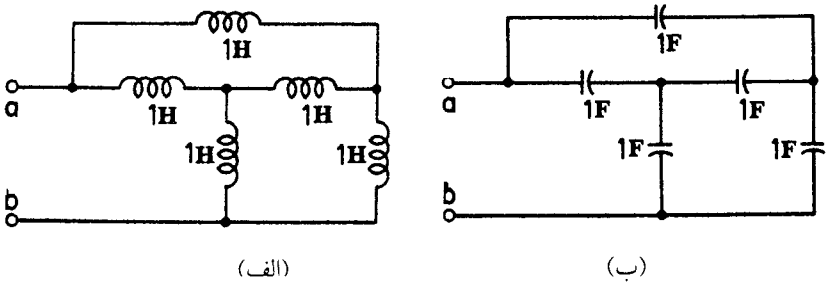
شکل (۴-۴۳): مدار الکتریکی با سلف‌های تزویج

۹- در سلف‌های تزویج ارائه‌شده در شکل (۴-۴۴) ابتدا نقطه‌های توپر را روی سیم‌پیچ‌ها مشخص نموده، سپس معادلات ولتاژ را برای هر یک از سیم‌پیچ‌ها بنویسید.



شکل (۴-۴۴): سلف‌های تزویج سه گانه

۱۰- با استفاده از خاصیت تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس، دو مدار سلفی و خازنی ارائه‌شده در شکل (۴-۴۵) را ساده کنید.



شکل (۴-۴۵): دو مدار الکتریکی سلفی و خازنی