فصل سوم

روش‌های تحلیل شبکه‌های مقاومتی

۳-۱- مقدمه

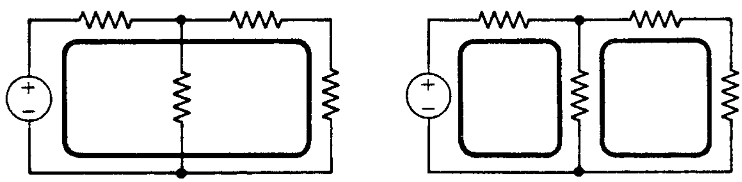
در فصول قبلی پس از آشنایی با عناصر اصلی مدارهای الکتریکی از قبیل منابع الکتریکی و مقاومت‌ها و بیان قوانین اساسی KCL ، KVL و قانون اهم، به تحلیل مدارهای ساده الکتریکی پرداختیم. در این فصل می‌خواهیم روش‌های اصولی تحلیل مدارهای الکتریکی از نوع مقاومتی را بیان نماییم. منظور از مدارهای مقاومتی، مدارهایی است که علاوه بر وجود منابع الکتریکی، تنها از عنصر مقاومت استفاده می‌کنند. از روش‌های اساسی در تحلیل مدارهای الکتریکی می‌توان به روش‌های مش، گره، جمع‌آثار و مدار معادل تونن اشاره نمود که در این فصل، این روش‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصول آینده، پس از بیان دیگر عناصر مدار از قبیل سلف‌ها و خازن‌ها، روش‌های تحلیل مدار ارائه‌شده در این فصل را به مدارهای کامل‌تر با وجود عناصر مقاومت، سلف، خازن و منابع گسترش خواهیم داد.

۳-۲- روش تحلیل مش

در این بخش برآنیم تا اصول تحلیل مدارهای الکتریکی را بر اساس روش مش بیان نماییم. برای درک این روش، ابتدا تحلیل یک مدار با دو مش را آغاز کرده و سپس روش ارائه شده را به مدارهای جامع‌تر و با مش‌های بیشتری گسترش خواهیم داد.

۳-۲-۱-معادلات مش برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KVL مفهوم حلقه را بیان نمودیم که هر حلقه از عناصری تشکیل شده‌اند که در نهایت، یک مسیر بسته را ایجاد می‌کردند. حال در اینجا با مفهوم خاصی به‌نام مش آشنا می‌شویم. یک مش، حلقه‌ای خواهد بود که آن حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده باشد. به‌عنوان مثال، در شکل (۳-۱- الف) حلقه درنظر گرفته شده، مش نمی‌باشد؛ زیرا حلقه موردنظر، شاخه وسطی را محصور کرده است. اما در شکل (۳-۱- ب) دو حلقه درنظر گرفته شده، دو مش می‌باشد، زیرا هر دو حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده است. به این حلقه‌ها، حلقه‌های اساسی مدار می‌گویند.



شکل (۳-۱): مثالی ساده برای مفهوم حلقه و مش؛ الف) حلقه؛ ب) مش

برای بیان اصول کلی روش مش، مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲- الف) را درنظر بگیرید که در این شکل، برای هر عنصر مقاومت، جریان و ولتاژی درنظر گرفته می‌شود که بر اساس مشخصه v-i برای این سه مقاومت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{R1}(t) &= R_1 \cdot i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) &= R_2 \cdot i_{R2}(t) \\ v_{R3}(t) &= R_3 \cdot i_{R3}(t) \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

حال برای این مدار بر اساس شکل (۳-۲- ب) دو مش در نظر می‌گیریم. سپس برای هر مش، معادله KVL را بر اساس متغیرهای شکل (۳-۲- الف) می‌نویسیم. لذا،

$$v_{s1}(t) = v_{R1}(t) + v_{R3}(t) \qquad (۳-۲)$$

$$-v_{s2}(t) = v_{R2}(t) - v_{R3}(t) \qquad (۳-۳)$$

با کاربرد روابط (۳-۱) در معادلات (۳-۲) و (۳-۳) می‌توان نوشت:

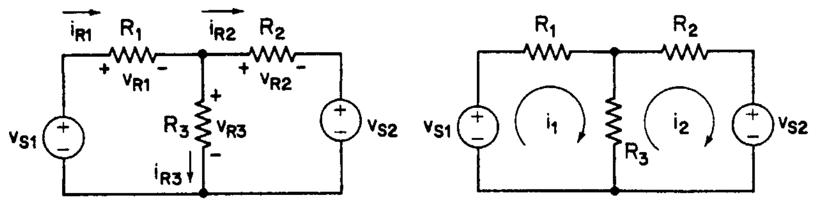
$$v_{s1}(t) = R_1 \cdot i_{R1}(t) + R_3 \cdot i_{R3}(t) \qquad (۳-۴)$$

$$-v_{s2}(t) = R_2 \cdot i_{R2}(t) - R_3 \cdot i_{R3}(t) \qquad (۳-۵)$$

در مرحله بعدی روش تحلیل مش، برای هر مش، یک جریان در جهت عقربه‌های ساعت درنظر می‌گیریم که در شکل (۳-۲- ب) با دو جریان مش i_1 و i_2 می‌باشد. با مقایسه این

دو جریان مش در شکل (۳-۲- ب) با جریان‌های ارائه‌شده در شکل (۳-۲- الف) نتیجه می‌گیریم که،

$$i_{R۱}(t) = i_۱(t)$$
$$i_{R۲}(t) = i_۲(t) \qquad (۳-۶)$$
$$i_{R۳}(t) = i_۱(t) - i_۲(t)$$



(الف) (ب)

شکل (۳-۲): یک مدار الکتریکی با دو حلقه؛ الف) بر اساس جریان شاخه‌ها؛ ب) بر اساس جریان مش‌ها

با استفاده از مجموعه روابط (۳-۶) در دو معادله (۳-۴) و (۳-۵) خواهیم داشت:

$$v_{s۱}(t) = (R_۱ + R_۳)\cdot i_۱(t) - R_۳ \cdot i_۲(t) \qquad (۳-۷)$$

$$-v_{s۲}(t) = -R_۳ \cdot i_۱(t) + (R_۲ + R_۳)\cdot i_۲(t) \qquad (۳-۸)$$

دو معادله اخیر، به دو معادله اساسی روش تحلیل مش معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی پیدا می‌کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به‌راحتی معادلات مش را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع ولتاژی که جریان تولیدی آنان در جهت جریان حلقه باشند، با علامت مثبت در سمت چپ معادله آورده می‌شود. مثلاً در حلقه دوم، منبع $v_{s۲}(t)$ ، جریانی در جهت خلاف جهت جریان حلقه $i_۲(t)$ ارسال می‌کند. لذا به‌صورت علامت منفی در معادله دوم آورده شده است.

۲- در معادله اول، جمله $(R_۱ + R_۳)\cdot i_۱(t)$ بیانگر افت ولتاژ کل مقاومت‌های مسیر حلقه موردنظر می‌باشد. در حلقه دوم نیز دو مقاومت $R_۲$ و $R_۳$ وجود دارد. پس یک جمله $(R_۲ + R_۳)\cdot i_۲(t)$ در سمت راست معادله دوم وارد می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که جریان عبوری از آنان فقط جریان همان مش نباشد و جریان مش‌های دیگر نیز از آن مقاومت عبور می‌کند، باید افت ولتاژ روی آن مقاومت ناشی از جریان مش دیگر را وارد آن معادله کرد. اگر جهت جریان مش دیگر، هم جهت با جریان مش موردنظر باشد، ولتاژ با علامت مثبت وارد شده و در غیر این‌صورت با علامت منفی

می‌آید. مثلاً در معادله (۳-۷) که در ارتباط با معادله مش در حلقه اول است، جمله $R_3 \cdot i_2(t)$ با علامت منفی وارد می‌شود؛ چون مقاومت R_3 علاوه بر جریان مش اول (یعنی $i_1(t)$) جریان مش دوم (یعنی $i_2(t)$) در خلاف جهت $i_1(t)$ از آن عبور می‌کند. لذا جمله $-R_3 \cdot i_2(t)$ در سمت راست معادله آورده می‌شود. همین موضوع را می‌توان برای جمله $-R_3 \cdot i_1(t)$ برای معادله مش در حلقه دوم نیز بیان نمود.

برای سادگی در نمایش معادلات مش، دو معادله (۳-۷) و (۳-۸) را می‌توان به‌شکل نمایش ماتریسی نیز بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} v_{s1}(t) \\ -v_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \qquad (۳-۹)$$

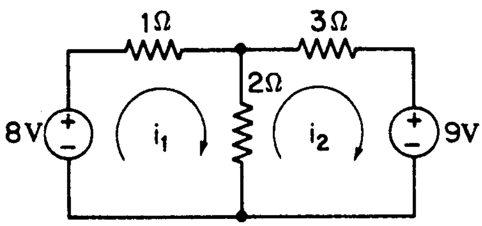
$$\mathbf{V}_S(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}(t)$$

برای تعیین جریان‌های i_1 و i_2 مربوط به دو مش، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ضمیمه (الف) اشاره شده است. یکی از مناسب‌ترین این روش‌ها، روش کرامر است. بر اساس این روش، برای تعیین جریان i_1 کافی است که با جایگذاری بردار $\mathbf{V}_S(t)$ از معادله (۳-۹) در ستون اول ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ و تعیین دترمینان آن و تقسیم دترمینان حاصل شده بر دترمینان ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ ، جریان i_1 به‌دست می‌آید. یعنی،

$$i_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} v_{s1}(t) & -R_3 \\ -v_{s2}(t) & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

این موضوع را برای جریان i_2 نیز می‌توان بیان نمود. در نهایت پس از محاسبه جریان مش‌ها و با استفاده از روابط (۳-۶) قادر هستیم تا جریان تمام شاخه‌ها و عناصر مدار را به‌دست آورده و سپس ولتاژ دو سر تمام عناصر و دیگر پارامترهای هر عنصر را بیابیم.

مثال (۳-۱): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۳)، جریان دو مش را بیابید. سپس جریان شاخه مقاومت ۲Ω را بیابید.



شکل (۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۱)

حل: در ابتدا دو مش با جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ در نظر می‌گیریم. بر اساس قواعد ارائه‌شده در این بخش، دو معادله از قانون KVL را به‌صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۸ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۲ & -۲ \\ -۲ & ۳+۲ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \end{bmatrix}$$

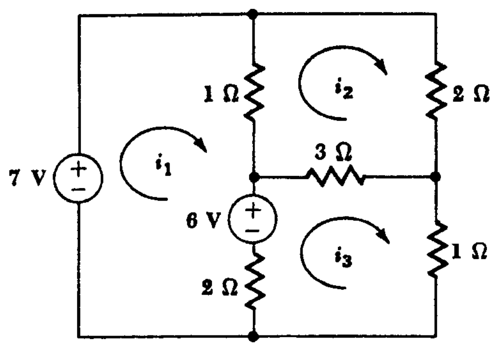
در صورتی‌که از روش معکوس‌گیری ماتریس ضرایب استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۸ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

پس از تعیین جریان مش‌ها، جریان شاخه با مقاومت ۲Ω از تفاضل جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ به‌دست می‌آید:

$$I_{eq} = i_۱ - i_۲ = ۲ - (-۱) = ۳\text{A}$$

مثال (۳-۲): شکل (۳-۴) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، جریان سه مش را بیابید.



شکل (۳-۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۲)

حل: با استفاده از قانون KVL برای سه حلقه خواهیم داشت:

$$۷ - ۶ = (۱+۲) \cdot i_۱ - ۱ \times i_۲ - ۲ \times i_۳$$
$$o = (۱+۲+۳) \cdot i_۲ - ۱ \times i_۱ - ۳ \times i_۳$$
$$۶ = (۳+۱+۲) \cdot i_۳ - ۳ \times i_۲ - ۲ \times i_۱$$

این سه معادله را به‌شکل ماتریسی زیر مرتب می‌کنیم.

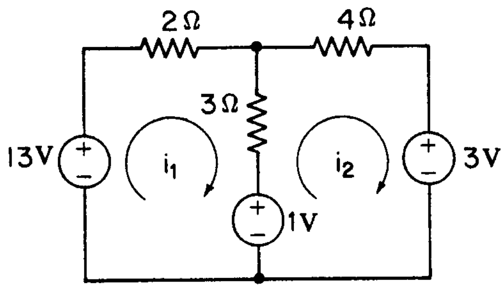
$$\begin{bmatrix} ۱ \\ o \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۶ & -۳ \\ -۲ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش کرامر جریان $i_۳$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i_{۲}(t)=\frac{\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۶ & ۰ \\ -۲ & -۳ & ۶ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۶ & -۳ \\ -۲ & -۳ & ۶ \end{vmatrix}}=\frac{۱۱۷}{۳۹}=۳\text{A}$$

و جریان مش‌های اول و دوم برابر $i_۱ = ۳\text{A}$ و $i_۲ = ۲\text{A}$ می‌شود.

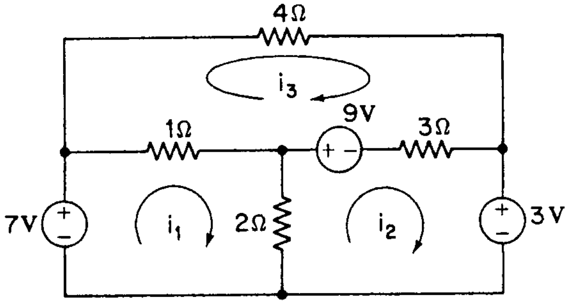
تمرین (۳-۱): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۵) جریان مش‌ها را بیابید و سپس جریان مقاومت ۳Ω را بیابید.



شکل (۳-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱)

جواب: $i_۱ = ۳\text{A}$ ، $i_۲ = ۱\text{A}$ ، $i_{۳\Omega} = ۲\text{A}$

تمرین (۳-۲): شکل (۳-۶) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، سه جریان مش‌ها را بیابید. سپس جریان مقاومت‌های ۴Ω و ۳Ω را بیابید.



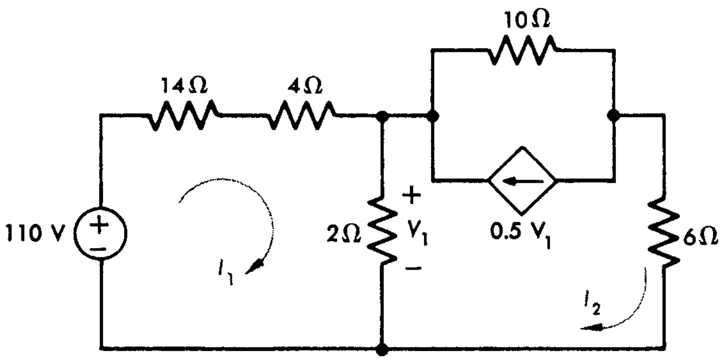
شکل (۳-۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۲)

جواب: $i_1 = ۲A$ ، $i_۲ = -۱A$ ، $i_۳ = ۱A$ ، $i_{۳\Omega} = ۲A$ ، $i_{۴\Omega} = ۱A$

۳-۲-۲- معادلات مش در مدارهای با منابع وابسته

در بسیاری از مدارهای الکتریکی، منابع وابسته در کنار دیگر عناصر مدارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. اولین خاصیت منابع وابسته آن است که مثل منابع مستقل، می‌توان تبدیل منابع ولتاژی به معادل جریانی و بلعکس را انجام داد و قوانین KCL و KVL را به‌کار برد. دومین خاصیت این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان، وابسته به ولتاژ یا جریان عنصر دیگری از مدار می‌باشد. لذا در روش تحلیل مش، پس از آنکه معادلات مربوط به قانون KVL را برای تمام مش‌ها بیان نمودیم، باید وابستگی موجود در منابع وابسته را به‌عنوان معادلات مکمل، در کنار دیگر معادلات مش در نظر گرفت. در نهایت با حل این معادلات، جریان مش‌ها و دیگر مشخصات مدار به‌دست می‌آید. در مثال زیر این روند تشریح می‌گردد.

مثال (۳-۳): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۷)، جریان‌های i_1 و $i_۲$ در دو مش مدار را بیابید.

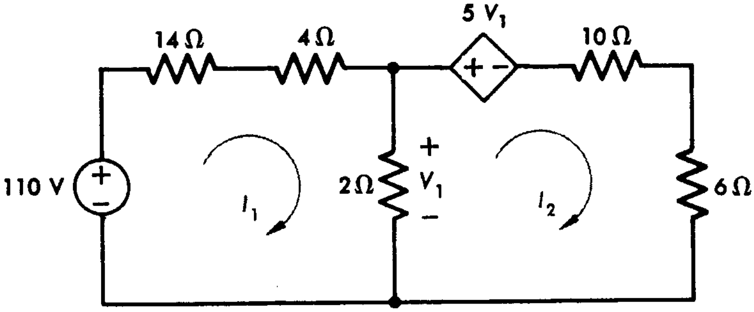


شکل (۳-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۳)

حل: در این مدار، یک منبع جریان وابسته به ولتاژ به‌کار رفته است. در ابتدا برای ساده‌سازی مدار، با توجه به آنکه منبع جریان وابسته با یک مقاومت ۱۰Ω موازی شده است، لذا ابتدا منبع معادل ولتاژی آن را بر اساس مطالب ارائه شده در بخش (۲-۴) به‌دست می‌آوریم. بدین منظور منبع ولتاژ به‌مقدار $۰/۵V_1 \times ۱۰ = ۵V_1$ خواهد بود که با

مقاومت ۱۰Ω سری می‌شود. این وضعیت در شکل (۳-۸) نشان داده شده است. حال معادلات مربوط به قانون KVL را برای دو مش مدار شکل (۳-۸) می‌نویسیم:

$$۱۱۰ = (۱۴ + ۴ + ۲) \cdot I_۱ - ۲ \times I_۲$$
$$-۵V_۱ = -۲ \times I_۱ + (۲ + ۱۰ + ۶) \cdot I_۲$$



شکل (۳-۸): اصلاح مدار الکتریکی شکل (۳-۷)

اما این دو معادله مش با سه متغیر خواهد بود و برای حل آن، نیاز به یک معادله دیگر خواهد بود. معادله سوم بر اساس رابطه مقید شده توسط منبع وابسته ایجاد می‌شود. ولتاژ $V_۱$ که دو سر مقاومت ۲Ω می‌باشد بر اساس جریان‌های دو مش به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$V_۱ = (I_۱ - I_۲) \times ۲$$

حال از سه معادله اخیر، سه متغیر $I_۱$ و $I_۲$ و $V_۱$ به‌دست می‌آید:

$$I_۱ = ۵\text{A}$$
$$I_۲ = -۵\text{A}$$
$$V_۱ = ۲۰\text{V}$$

پس با استفاده از این مثال، روال کلی روش تحلیل مش با وجود منابع وابسته را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

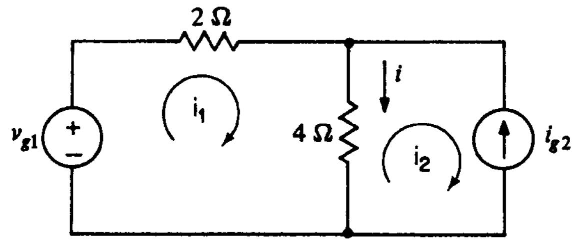
۱- ابتدا معادلات مش را برای تمام مش‌های مدار و با وجود منابع وابسته (و مشابه با منابع مستقل) می‌نویسیم. در این قسمت، سعی می‌گردد که منابع جریانی به منابع معادل ولتاژی تبدیل گردند.

۲- در این مرحله با مشخص کردن منابع وابسته، معادله‌های مقیدساز این منابع را به دسته معادلات اول اضافه می‌کنیم.

۳- مجموعه معادلات مراحل اول و دوم را در کنار هم قرار داده و مجهولات این دسته معادلات را حل می‌کنیم.

موضوع دیگری که در روش تحلیل مش در مدارهای الکتریکی وجود دارد آن است که در صورتی‌که در یک مش، منبع جریانی به‌طور سری با دیگر عناصر مدار وجود داشته باشد، دیگر برای این مش نیازی نیست که معادله مربوط به قانون KVL را برای آن بنویسیم؛ زیرا هدف از نوشتن معادله KVL در روش تحلیل مش آن است که جریان مش را تعیین کنیم و چون در این مش، یک منبع جریان وجود دارد، لذا جریان این مش همیشه و تحت هر شرایطی برابر مقدار جریان تولیدی توسط منبع جریان است. این موضوع را در مثال بعدی مشاهده خواهیم کرد و روش حل مدار را بیان می‌کنیم.

مثال (۳-۴): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۹)، اگر مقادیر $V_{g۱} = ۱۸\text{V}$ و $i_{g۲} = ۳\text{A}$ را داشته باشیم، با استفاده از روش تحلیل مش، جریان عبوری از مقاومت ۴Ω (یعنی جریان i) را بیابید.



شکل (۳-۹): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۴)

حل: در این مدار، دو مش وجود دارد که با جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ مشخص می‌شوند. با توجه به آنکه در مش دوم، منبع جریانی با مقدار ۳A وجود دارد پس نتیجه می‌گیریم که $i_۲ = -۳\text{A}$ است؛ زیرا جریان مش در خلاف جهت جریان منبع است. حال قانون KVL را برای مش اول می‌نویسیم:

$$۱۸ = (۲+۴)\cdot i_۱ - ۴\times i_۲$$

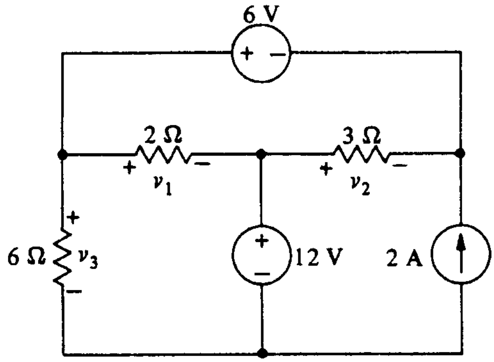
با توجه به آنکه $i_۲ = -۳\text{A}$ است لذا $i_۱$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$i_۱ = \frac{۱۸ + ۴\times(-۳)}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱\text{A}$$

در نتیجه جریان i برابر خواهد بود با:

$$i = i_۱ - i_۲ = ۱ + ۳ = ۴\text{A}$$

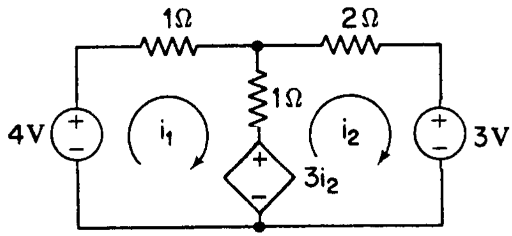
تمرین (۳-۳): با استفاده از روش تحلیل مش، مجهولات $v_۱$ ، $v_۲$ و $v_۳$ را در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۱۰) بیابید.



شکل (۳-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۳)

جواب: $v_1 = ۲V$ ، $v_2 = ۴V$ ، $v_3 = ۱۴V$

تمرین (۳-۴): در مدار الکتریکی شکل (۳-۱۱)، جریان‌های i_1 و i_2 در دو مش را بیابید.



شکل (۳-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۴)

جواب: $i_1 = ۳A$ و $i_2 = -۱A$

۳-۳- روش تحلیل گره

مشابه روش تحلیل مش، در این بخش نیز روش مفید دیگری به‌نام روش تحلیل گره را بیان می‌کنیم. برای بیان اصول کلی این روش، ابتدا یک مدار ساده با دو گره را مورد بررسی قرار داده و سپس به مدارهای کامل‌تر و جامع‌تری اشاره خواهیم نمود.

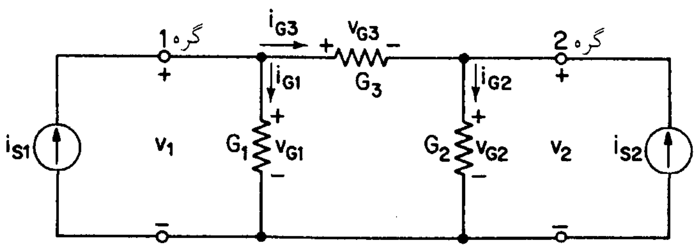
۳-۳-۱- معادلات گره برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KCL ، مفهوم گره را بیان نمودیم. در آنجا بیان نمودیم که جمع جبری تمام جریان‌های مربوط به شاخه‌های متصل به هر گره، برابر صفر

می‌باشد. در قانون KCL ، جریان‌های ورودی را با علامت منفی و جریان‌های خروجی از هر گره را با علامت مثبت در نظر می‌گیریم که در یک طرف معادله می‌آیند. شکل دیگر بیان قانون KCL آن است که جمع جریان‌های ورودی با جمع جریان‌های خروجی، برابر خواهد بود. حال در روش تحلیل گره، یک گره از گره‌های مدار را به‌عنوان گره مبنا اختیار می‌کنیم و ولتاژ دیگر گره‌های مدار را نسبت به گره مبنا محاسبه می‌کنیم (معمولاً ولتاژ گره مبنا را به‌مقدار صفر در نظر می‌گیریم).

برای بیان اصول کلی این روش، مدار الکتریکی شکل (۳-۱۲) را در نظر بگیرید. در این شکل، برای هر عنصر، یک جریان و ولتاژی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس رابطه *v-i* برای این سه مقاومت با رسانایی $G_۱$ ، $G_۲$ و $G_۳$ خواهیم داشت:

$$i_{G۱}(t) = G_۱ \cdot v_{G۱}(t)$$
$$i_{G۲}(t) = G_۲ \cdot v_{G۲}(t) \qquad (۱۲-۳)$$
$$i_{G۳}(t) = G_۳ \cdot v_{G۳}(t)$$



شکل (۳-۱۲): یک مدار ساده با دو گره

حال در مدار مذکور متوجه می‌شویم که غیر از گره مبنا (که همان گره پایینی مدار با ۴ شاخه متصل به آن است) دو گره دیگر با شماره‌های ۱ و ۲ وجود دارد. در صورتی‌که قانون KCL را برای بین این دو گره بنویسیم، خواهیم داشت:

$$i_{s۱}(t) = i_{G۱}(t) + i_{G۳}(t) \qquad (۱۳-۳)$$

$$i_{s۲}(t) = i_{G۲}(t) - i_{G۳}(t) \qquad (۱۴-۳)$$

با کاربرد روابط (۳-۱۲) در معادلات (۳-۱۳) و (۳-۱۴) می‌توان نوشت:

$$i_{s۱}(t) = G_۱ \cdot v_{G۱}(t) + G_۳ \cdot v_{G۳}(t) \qquad (۱۵-۳)$$

$$i_{s۲}(t) = G_۲ \cdot v_{G۲}(t) - G_۳ \cdot v_{G۳}(t) \qquad (۱۶-۳)$$

در مرحله بعدی روش تحلیل گره، برای هر گره، یک ولتاژ با شماره گره در نظر می‌گیریم که در این شکل، ولتاژهای $v_۱(t)$ برای گره ۱ و $v_۲(t)$ برای گره ۲ هستند. با مقایسه این دو ولتاژ گره با ولتاژهای ارائه‌شده برای عناصر در شکل (۳-۱۲) نتیجه می‌گیریم که،

$$v_{G1}(t) = v_1(t)$$
$$v_{G2}(t) = v_2(t) \qquad (۱۷-۳)$$
$$v_{G3}(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

با استفاده از مجموعه روابط (۳-۱۷) در هر دو معادله (۳-۱۵) و (۳-۱۶) خواهیم داشت:

$$i_{s1}(t) = (G_1 + G_3) \cdot v_1(t) - G_3 \cdot v_2(t) \qquad (۱۸-۳)$$

$$i_{s2}(t) = -G_3 \cdot v_1(t) + (G_2 + G_3) \cdot v_2(t) \qquad (۱۹-۳)$$

دو معادله اخیر به دو معادله اساسی روش تحلیل گره معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی می‌یابیم که با استفاده از آنها می‌توان به‌راحتی معادلات گره را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع جریانی که جهت جریان تولیدی آنان به سمت گره موردنظر می‌باشد، با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره موردنظر آورده می‌شود. مثلاً در گره اول، جریان منبع $i_{s1}(t)$ به سمت داخل گره ۱ بوده و لذا با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره ۱ در رابطه (۳-۱۸) وارد می‌شود.

۲- در معادله اول جمله $(G_1 + G_3) \cdot v_1(t)$ در سمت راست معادله، بیانگر کل جریان خروجی از گره ۱ ناشی از ولتاژ همان گره می‌باشد. در معادله دوم نیز چون دو مقاومت با رسانایی G_2 و G_3 به گره ۲ متصل است لذا جمله $(G_2 + G_3) \cdot v_2(t)$ با علامت مثبت در سمت راست معادله آورده می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که بین دو گره واقع می‌شوند، باید جریان ناشی از گره مقابل را به‌صورت علامت منفی در گره مربوطه وارد نمود. به‌عنوان مثال، چون مقاومت با رسانایی G_3 بین دو گره ۱ و ۲ واقع شده است لذا جمله $G_3 \cdot v_2(t)$ با علامت منفی در معادله اول مربوط به گره اول و در سمت راست آن آورده می‌شود.

برای سادگی در نمایش معادلات گره، دو معادله (۳-۱۸) و (۳-۱۹) را به‌شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم:

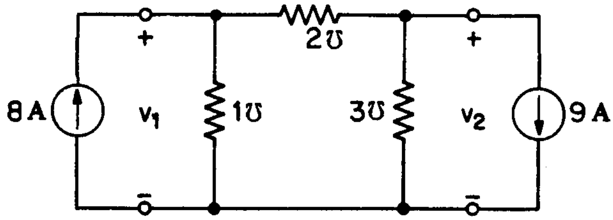
$$\begin{bmatrix} i_{s1}(t) \\ i_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۳)$$

و یا،

$$\mathbf{I}_s(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}(t) \qquad (۲۱-۳)$$

مشابه روش تحلیل مش، برای تعیین ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در دو گره ۱ و ۲ می‌توان از روش کرامر استفاده نمود و یا اینکه ماتریس ضرایب $\mathbf{G}$ در معادله (۳-۲۱) را معکوس نموده و در بردار جریان $\mathbf{I}_s(t)$ ضرب کنیم تا بردار $\mathbf{V}(t)$ تعیین شود. در نهایت می‌توان گفت که با مشخص شدن ولتاژ گره‌ها قادریم تا جریان تمام شاخه‌ها را محاسبه کنیم.

مثال (۳-۵): شکل (۳-۱۳) یک مدار الکتریکی ساده با دو گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_۱(t)$ و $v_۲(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۵)

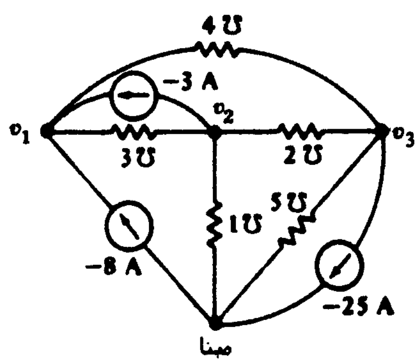
حل: با استفاده از قانون KCL برای این دو گره و بر اساس معادله (۳-۲۰)، معادلات ماتریسی گره به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۸ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۲ & -۲ \\ -۲ & ۳+۲ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_۱(t) \\ v_۲(t) \end{bmatrix}$$

علامت منفی برای منبع جریان در گره ۲ به این خاطر است که جریان این منبع از گره ۲ خارج می‌شود، لذا با علامت منفی در سمت چپ معادله مربوط به گره ۲ وارد می‌شود.
سپس با استفاده از روش معکوس‌گیری در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} v_۱(t) \\ v_۲(t) \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۸ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۶): شکل (۳-۱۴) یک مدار الکتریکی با سه گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. ولتاژهای $v_۱(t)$ ، $v_۲(t)$ و $v_۳(t)$ را با استفاده از روش تحلیل گره تعیین نمایید.



شکل (۳-۱۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۶)

حل: با استفاده از قانون KCL برای سه گره مدار، روابط زیر را داریم:

$$(-۳)+(-۸)=(۳+۴)\cdot v_۱(t)-۳\times v_۲(t)-۴\times v_۳(t)$$
$$-(-۳)=-۳\times v_۱(t)+(۳+۲+۱)\cdot v_۲(t)-۲\times v_۳(t)$$
$$-(-۲۵)=-۴\times v_۱(t)-۲\times v_۲(t)+(۲+۵)\cdot v_۳(t)$$

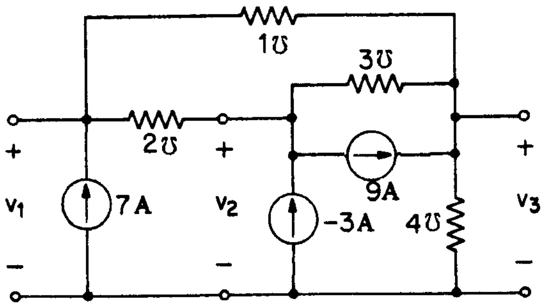
و اگر این سه معادله را به‌شکل ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -۱۱ \\ ۳ \\ ۲۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۴ \\ -۳ & ۶ & -۲ \\ -۴ & -۲ & ۷ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_۱(t) \\ v_۲(t) \\ v_۳(t) \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش کرامر ولتاژهای $v_۱(t)$ ، $v_۲(t)$ و $v_۳(t)$ ، از رابطه ماتریسی اخیر محاسبه می‌شوند:

$$v_۱(t)=\frac{\begin{vmatrix} -۱۱ & -۳ & -۴ \\ ۳ & ۶ & -۲ \\ ۲۵ & -۲ & ۷ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۷ & -۳ & -۴ \\ -۳ & ۶ & -۲ \\ -۴ & -۲ & ۷ \end{vmatrix}}=۱\text{V}$$
$$v_۲(t)=۲\text{V}$$
$$v_۳(t)=۳\text{V}$$

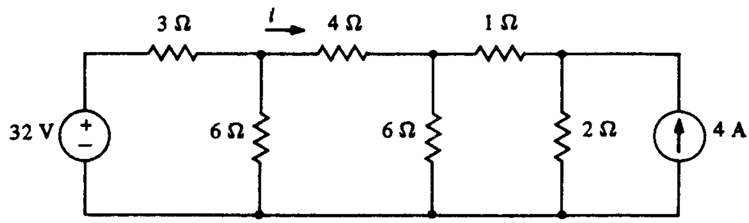
تمرین (۳-۵): مدار الکتریکی در شکل (۳-۱۵) دارای سه گره (بدون گره مبنا) می‌باشد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_۱(t)$ ، $v_۲(t)$ و $v_۳(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۵)

جواب: $v_۱(t)=۲\text{V}$ ، $v_۲(t)=-۱\text{V}$ ، $v_۳(t)=۱\text{V}$

تمرین (۳-۶): با استفاده از روش تحلیل گره، جریان $i(t)$ در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۱۶) بیابید.



شکل (۳-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۶)

جواب: $i(t) = ۲A$

۳-۳-۲- معادلات گره در مدارهای با منابع وابسته

مشابه آنچه که در بخش (۳-۲-۲) معادلات مش را با وجود منابع وابسته حل نمودیم، در این بخش نیز می‌خواهیم معادلات گره را با وجود منابع وابسته مورد بررسی قرار دهیم. روند تحلیل این نوع مدارها مشابه روند ارائه‌شده در بخش موردنظر می‌باشد که مراحل آن در زیر نیز آمده است:

۱- ابتدا برای مدار موردنظر، معادلات گره را برای تمام گره‌های مدار (بجز گره مبنا) و با وجود منابع وابسته (و مشابه با منابع مستقل) می‌نویسیم. برای بیان راحت‌تر قانون KCL در گره، مناسب است تا منابع ولتاژی به منابع معادل جریانی تبدیل شوند.

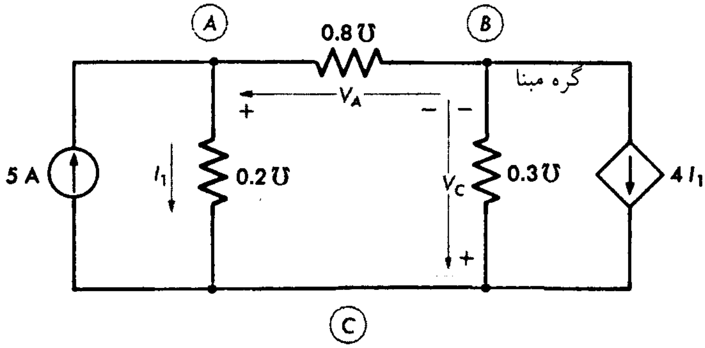
۲- سپس برای تمام منابع وابسته در مدار، معادلات مقیدساز هر یک از این منابع را به‌عنوان معادلات اضافی به دسته معادلات ایجاد شده در مرحله اول اضافه می‌کنیم.

۳- مجموعه معادلات مراحل اول و دوم را در کنار هم قرار داده و مجهولات این دسته معادلات را حل می‌کنیم.

نکته مهم دیگری که در روش تحلیل گره وجود دارد آن است که اگر در یک گره‌ای، منبع ولتاژی بین آن گره با گره مبنا وجود داشته باشد، دیگر برای آن گره، معادله مربوط به قانون KCL را نمی‌نویسیم، زیرا هدف از روش گره آن است که ولتاژ گره‌ها را بیابیم که در این وضعیت، ولتاژ گره موردنظر توسط منبع ولتاژ موردنظر، مشخص شده است. همچنین اگر منبع ولتاژی به‌عنوان یک شاخه بین دو گره اصلی (غیر از گره مبنا) باشند لازم است که برای آن شاخه، یک جریان فرض شود و قانون KCL را برای هر دو گره بنویسیم. بعلاوه با توجه به آنکه یک مجهول به‌عنوان متغیر جریان منبع ولتاژ به متغیرهای

معادلات گره اضافه شده است، لذا به یک معادله دیگر نیاز داریم. این معادله از تفاضل ولتاژ دو گره و مساوی قرار دادن آن با مقدار منبع ولتاژ موردنظر به‌دست می‌آید. در مثال‌های بعدی این موارد را بیشتر توضیح خواهیم داد.

مثال (۳-۷): مدار الکتریکی در شکل (۳-۱۷) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ مقاومت با رسانایی ℧۰/۸ را بیابید. فرض کنید که گره B به‌عنوان گره مبنا باشد.



شکل (۳-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۷)

حل: با توجه به آنکه گره B به‌عنوان گره مبنا اختیار شده است، لذا قانون KCL را برای دو گره A و C می‌نویسیم. در این حالت، منبع جریان وابسته را مشابه منابع مستقل در نظر می‌گیریم.

$$\text{گره A}: \quad ۵=(۰/۸+۰/۲)\cdot V_A-۰/۲\times V_C$$

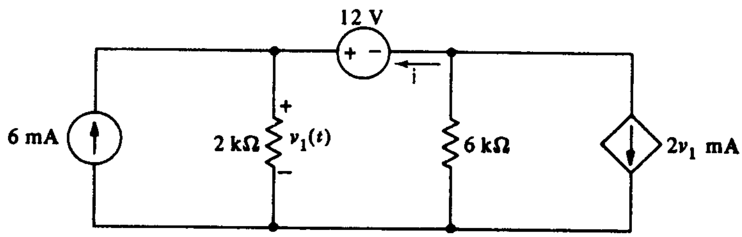
$$\text{گره C}: \quad -۵+۴I_۱=-۰/۲\times V_A+(۰/۲+۰/۳)\cdot V_C$$

دو معادله اخیر دارای ۳ متغیر مجهول می‌باشد؛ پس نیاز به معادله سوم می‌باشد. این معادله از رابطه مقید شده مربوط به منبع کنترل وابسته به‌دست می‌آید:

$$I_۱=(V_A-V_C)\times ۰/۲$$

حال با حل این سه معادله اخیر ولتاژ V_A را با روش کرامر به‌دست آورده که برابر $V_A=۵\text{V}$ می‌شود. این ولتاژ، همان ولتاژ دو سر مقاومت با رسانایی ℧۰/۸ است؛ زیرا سر دیگر این مقاومت، به زمین متصل شده است.

مثال (۳-۸): با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ $v_۱$ را در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۱۸) بیابید.



شکل (۳-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۸)

حل: این مدار دارای دو گره (بدون گره مبنا) است که بین این دو گره یک منبع ولتاژ ۱۲V وجود دارد. بدین منظور یک جریان i برای این منبع در نظر گرفته می‌شود. پس قانون KCL را برای این دو گره می‌نویسیم:

$$۶\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲\times۱۰^{۳}}v_۱-i$$

$$-۲v_۱\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۶\times۱۰^{۳}}v_۲+i$$

این دو معادله با سه متغیر مجهول همراه خواهد بود. با توجه به اینکه منبع ولتاژ ۱۲V بین دو گره ۱ و ۲ قرار گرفته است، لذا معادله سوم از تفاضل ولتاژ بین دو گره و تساوی آن با ولتاژ منبع ۱۲V به‌دست می‌آید. یعنی،

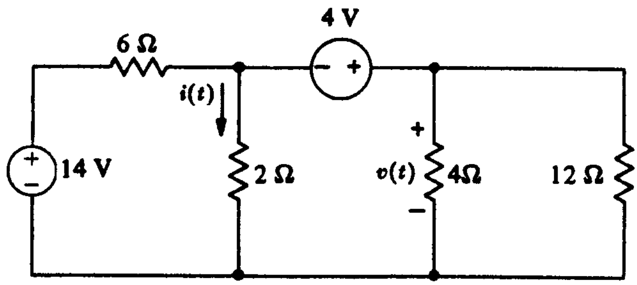
$$v_۱-v_۲=۱۲\text{V}$$

حال از سه معادله اخیر، خواهیم داشت:

$$v_۱=۳\text{V}$$

$$v_۲=-۹\text{V}$$

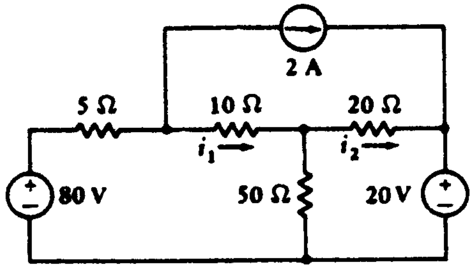
تمرین (۳-۷): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۱۹) را با استفاده از روش تحلیل گره حل نموده و مقادیر متغیرهای v و i مشخص شده در شکل را بیابید.



شکل (۳-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۷)

جواب: $v = ۵V$ ، $i = ۰/۵A$

تمرین (۳-۸): شکل (۳-۲۰) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل گره، جریان‌های $i_۱$ و $i_۲$ را بیابید.



شکل (۳-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۸)

راهنمایی و جواب: ابتدا منبع ولتاژ ۸۰V با مقاومت ۵Ω را به یک منبع معادل جریانی با جریان ۱۶A و مقاومت موازی ۵Ω تبدیل کنید. $i_۱ = ۷۸/۴۱$ و $i_۲ = ۴۴/۴۱$

۳-۴- روش تحلیل جمع آثار

یکی دیگر از روش‌های حل مدارهای الکتریکی، روش جمع‌آثار[1] می‌باشد. این روش در مدارهایی به‌کار می‌روند که علاوه بر خطی‌بودن، از چند منبع مستقل استفاده کرده باشد. در مدارهایی که شامل چندین منبع مستقل باشند، هر پاسخ مدار را می‌توان مجموع چندین مولفه دانست که هر مولفه آن، پاسخ مدار به یک منبع مستقل به‌تنهایی خواهد بود. اصل جمع‌آثار بیان می‌کند که برای تعیین جریان یا ولتاژ عنصری دلخواه از مدار با چندین منبع ورودی، می‌توان از جمع جبری تاثیرپذیری هر یک از منابع ورودی به‌تنهایی در متغیر دلخواه به‌دست آورد.

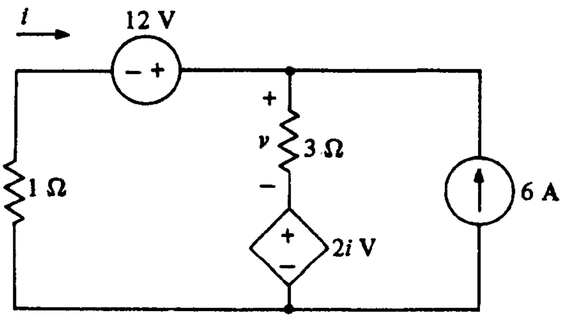
روال حل این روش بر این اساس است که ابتدا یک منبع مستقل مدار را به‌عنوان منبع ورودی در نظر گرفته و دیگر منابع مستقل را حذف می‌کنیم. سپس با حل این مدار، مقدار متغیر مجهول را به‌دست می‌آوریم. این کار را برای تک‌تک منابع مستقل انجام می‌دهیم. سپس جواب‌های به‌دست آمده برای متغیر مجهول موردنظر را در حل مدار با هم جمع جبری می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، پاسخ کامل مدار از جمع جبری پاسخ‌های ناشی از اعمال

---
[1]- Superposition Method

هر یک از منابع مستقل به‌طور جداگانه به‌دست می‌آید. البته اگر منابع وابسته‌ای در مدار وجود داشتند، می‌باید این منابع را در تک‌تک مدارهای مورد نظر در نظر گرفت. به‌عبارت دیگر، روش جمع‌آثار با منابع وابسته هیچ کاری ندارد و اثر آنان در تمام مدارها در نظر گرفته می‌شود.

لازم به‌ذکر است که اگر بخواهیم منبع ولتاژی را حذف کنیم باید دو سر آن را اتصال کوتاه کنیم. یعنی بی‌اثر شدن منبع ولتاژ در مدارهای الکتریکی با صفر شدن مقدار آن منبع مهیا می‌شود و این کار هم با اتصال کوتاه شدن دو سر آن امکان‌پذیر است. همچنین اگر بخواهیم منبع جریانی را حذف کنیم و آن را در مدار، بی‌تاثیر کنیم باید مقدار جریان تولیدی آن منبع جریان، صفر شود. این کار با اتصال باز شدن (قطع شدن) منبع جریان از مدار، امکان‌پذیر خواهد بود.

مثال (۳-۹): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۱) را در نظر بگیرید. در این مدار، ولتاژ v را با استفاده از روش تحلیل جمع‌آثار بیابید.



شکل (۳-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۹)

حل: در ابتدا می‌خواهیم مقدار متغیر ولتاژ v موردنظر را ناشی از منبع ولتاژ ورودی ۱۲V مورد بررسی قرار دهیم. لذا باید اثر منبع مستقل جریان را حذف کنیم. این مدار در شکل (۳-۲۲- الف) نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ v_1 معرف اثر منبع ولتاژ مستقل ۱۲V در ولتاژ دو سر مقاومت ۳Ω است. برای تعیین v_1 از روش تحلیل مش استفاده می‌کنیم؛ یعنی قانون KVL را برای مدار می‌نویسیم:

$$۱۲ = (۳+۱)\cdot i_1 + ۲\times i_1$$

در نتیجه:

$$i_1 = \frac{۱۲}{۶} = ۲\text{A}$$

با معلوم شدن جریان حلقه، ولتاژ v_1 برابر خواهد بود با:

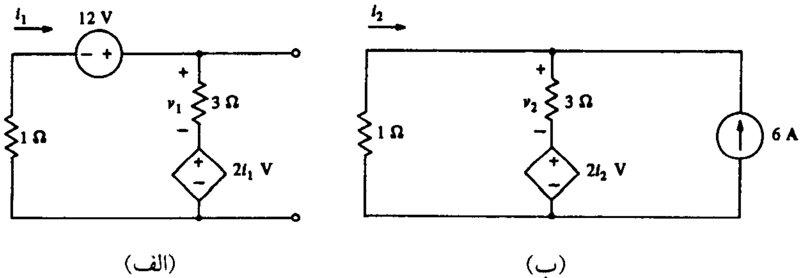
$$v_1 = ۳ \times ۲ = ۶V$$

حال در مرحله دوم حل، اثر منبع مستقل جریانی در ولتاژ دو سر مقاومت ۳Ω را محاسبه می‌کنیم. این ولتاژ را با v_2 نشان می‌دهیم که مدار آن در شکل (۳-۲۲- ب) مشخص شده است. همان‌گونه که در این مدار مشخص شده است، با اتصال کوتاه شدن منبع مستقل ولتاژی ۱۲V ، اثر آن در مدار، حذف می‌شود. برای تعیین ولتاژ v_2 در شکل (۳-۲۲- ب) از روش تحلیل مش استفاده می‌کنیم؛ زیرا جریان حلقه دوم (که در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود) برابر ۶A- می‌باشد. لذا فقط قانون KVL را برای حلقه سمت چپ می‌نویسیم:

$$(۱+۳)\cdot i_2 - ۳(-۶) + ۲\times i_2 = o$$

با حل این معادله داریم:

$$i_2 = -۳A$$



شکل (۳-۲۲): روش تحلیل جمع‌آثار؛ الف) اثر منبع ولتاژ مستقل؛ ب) اثر منبع جریان مستقل

حال جریان عبوری از مقاومت ۳Ω برابر است با:

$$i_{۳\Omega} = -۳ - (-۶) = ۳A$$

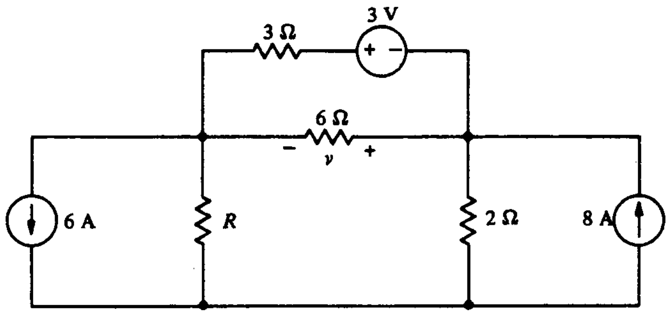
لذا ولتاژ v_2 برابر خواهد بود با:

$$v_2 = ۳ \times i_{۳\Omega} = ۳ \times ۳ = ۹V$$

حال برای تعیین ولتاژ v در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۲۱)، کافی است که ولتاژهای v_1 و v_2 را با هم جمع کنیم.

$$v = v_1 + v_2 = ۶ + ۹ = ۱۵V$$

تمرین (۳-۹): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۳) را در نظر بگیرید. اگر در این مدار، $R=۲\Omega$ باشد، با استفاده از روش جمع آثار، ولتاژ v را بیابید.



شکل (۳-۲۳): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۹)

جواب: $v=۴+\left(-\frac{۴}{۳}\right)+\frac{۱۶}{۳}=۸\text{V}$

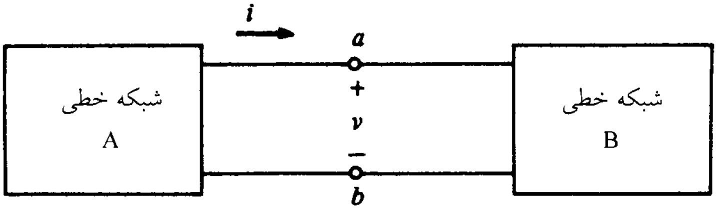
۳-۵- روش حل با استفاده از قضایای تونن و نورتن

در بخش (۲-۴) مدار معادل تونن و نورتن را برای منابع الکتریکی بیان نمودیم. در آن بخش دریافتیم که چگونه می‌توان منابع جریان را به منابع معادل ولتاژی تبدیل کرد و یا برعکس، منابع ولتاژ را با منابع معادل جریانی جایگزین نماییم. در این بخش می‌خواهیم مفاهیم ارائه‌شده در آن بخش را به مدارهای بزرگ‌تر گسترش دهیم که این موضوع تحت عنوان قضایای تونن و نورتن[1] بیان می‌شود.

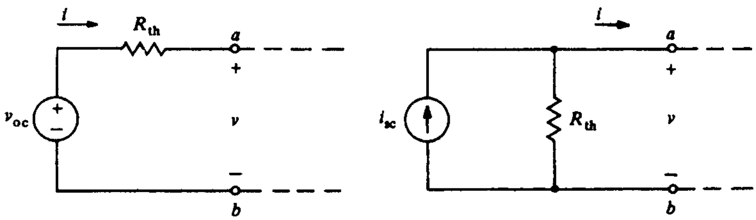
برای بیان این دو قضیه و دلیل کاربرد آن، فرض کنید که مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۴) را به دو بخش مدار A و مدار B تقسیم کنیم. حال می‌خواهیم مدار الکتریکی A را ساده نموده و اجزا آن را به‌صورت یک منبع ولتاژ سری با مقاومت، و یا یک منبع جریان موازی با مقاومت تبدیل نماییم. لازمه این کار آن است که مدار الکتریکی A ، از اعضای خطی تغییرناپذیر با زمان، تشکیل شده باشد. این دو نوع ساده‌سازی بر اساس قضایای تونن و نورتن بیان می‌شود. قضیه تونن بیان می‌کند که هر مدار خطی متشکل از مقاومت‌ها و منابع را می‌توان به یک مدار معادل تبدیل نمود که از سری شدن یک منبع ولتاژ با یک مقاومت تشکیل می‌گردد که در شکل (۳-۲۵- الف) نشان داده شده است. همچنین با

[1]- Thevenin and Norton’s Theorems

استفاده از قضیه نورتن می‌توان این مدار خطی را با یک منبع جریان موازی شده با یک مقاومت، معادل‌سازی نمود که در شکل (۳-۲۵- ب) مشخص شده است. یکی از این دو مدار، جایگزین مدار خطی A در شکل (۳-۲۴) خواهد شد.



شکل (۳-۲۴): تقسیم مدار به دو بخش A و B

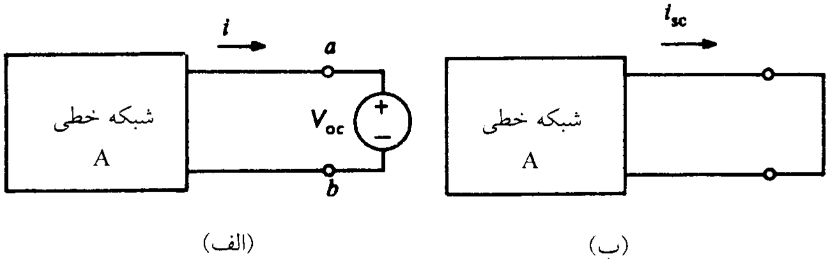


(الف) (ب)

شکل (۳-۲۵): الف) مدار معادل هم‌ارز تونن؛ ب) مدار معادل هم‌ارز نورتن

حال می‌خواهیم نحوه محاسبه مقادیر v_{oc} و R_{th} را در مدار معادل هم‌ارز تونن و مقادیر i_{sc} و R_{th} را در مدار معادل هم‌ارز نورتن بیان کنیم. بدین منظور ابتدا مدار B را از مدار خطی A از دو سر a و b جدا می‌کنیم و فقط مدار خطی A را در نظر می‌گیریم. پارامترهای موردنظر را از دو آزمایش مدار باز و مدار اتصال کوتاه تعیین می‌کنیم. در آزمایش مدار باز ارائه‌شده در شکل (۳-۲۶- الف) فرض می‌کنیم که در دو سر a و b ، یک منبع ولتاژ مجهول قرار می‌دهیم که با v_{oc} نشان می‌دهیم. این منبع ولتاژ v_{oc} از دو سر a و b با مدار خطی A موازی می‌شود. اکنون با حل این مدار (با یکی از روش‌های حل مش، گره یا جمع آثار)، ولتاژ مدار باز v_{oc} به‌دست می‌آید. در آزمایش مدار اتصال کوتاه که در شکل (۳-۲۶- ب) نشان داده شده است، دو سر a و b را به هم به‌طور مستقیم وصل می‌کنیم. سپس با تحلیل مدار، جریان i_{sc} عبوری از این اتصال محاسبه می‌شود. حال برای محاسبه R_{th} از تقسیم ولتاژ مدار باز v_{oc} بر جریان مدار اتصال کوتاه i_{sc} استفاده می‌کنیم. یعنی:

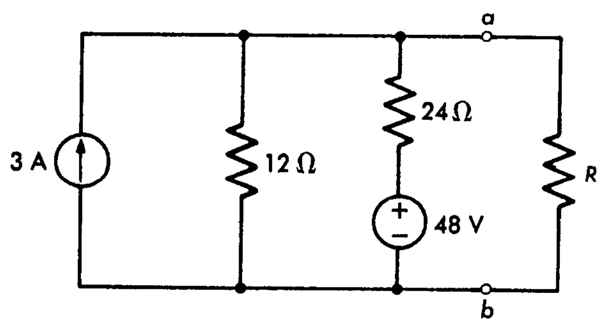
$$R_{th} = {}^{v_{oc}}\!/_{i_{sc}} \qquad (۲۲-۳)$$



شکل (۳-۲۶): الف) آزمایش مدار باز؛ ب) آزمایش مدار اتصال کوتاه

راه دیگر محاسبه R_{th} برای معادل‌سازی مدار خطی A ، آن است که کلیه منابع مستقل در مدار خطی A را حذف نموده و امپدانس معادل دیده شده از دو سر a و b را برای مدار خطی A محاسبه می‌کنیم. این روند را می‌توان در مثال زیر مشاهده نمود.

مثال (۳-۱۰): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۲۷) ابتدا مدار هم‌ارز تونن از مدار سمت چپ دو سر a و b را بیابید. سپس مقدار R را به‌گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان مصرفی را در آن داشته باشیم.



شکل (۳-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۱۰)

حل: در مدار موردنظر، از آنجا که مقاومت R مورد مطالعه است، لذا آن را به‌عنوان شبکه B در نظر گرفته و بقیه مدار در سمت چپ دو سر a و b را به‌عنوان شبکه خطی A در نظر می‌گیریم. حال ابتدا باید هم‌ارز معادل تونن برای شبکه A (دیده شده از دو سر a و b) را بیابیم. برای رسیدن به این هدف، از دو آزمایش مدار باز و مدار اتصال کوتاه استفاده می‌کنیم که این دو مدار بترتیب در شکل‌های (۳-۲۸- الف) و (۳-۲۸- ب) نشان داده شده است. برای به‌دست آوردن ولتاژ v_{oc} در مدار ارائه شده در شکل (۳-۲۸- الف)، از روش تحلیل گره استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

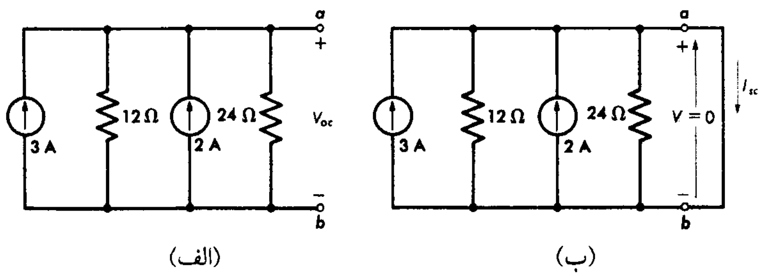
$$۲+۳=\frac{۱}{۱۲}v_{oc}+\frac{۱}{۲۴}v_{oc}$$
$$v_{oc}=۴۰\text{V}$$

حال برای محاسبه i_{sc} کافی است که دو سر a و b را مطابق با شکل (۳-۲۸- ب) اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را (یعنی i_{sc}) محاسبه کنیم. در این مدار با توجه به آنکه با اتصال کوتاه شدن دو سر a و b ، دو سر مقاومت‌های ۲۴Ω و ۱۲Ω به‌هم وصل می‌شوند، لذا از آنها جریانی عبور نمی‌کند. پس با استفاده از قانون KCL در گره مدار خواهیم داشت:

$$۲+۳=i_{sc} \quad \Rightarrow \quad i_{sc}=۵\text{A}$$

با محاسبه v_{oc} و i_{sc} ، مقدار R_{th} به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{th}=\frac{v_{oc}}{i_{sc}}=\frac{۴۰}{۵}=۸\Omega$$



شکل (۳-۲۸): الف) آزمایش مدار باز؛ ب) آزمایش مدار اتصال کوتاه

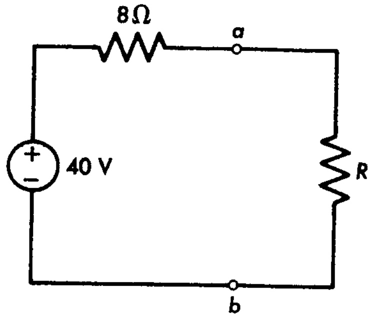
در نتیجه مدار ارائه‌شده در شکل (۳-۲۹)، هم‌ارز تونن مدار را به‌همراه مقاومت R نشان می‌دهد. حال برای تعیین مقدار R به‌گونه‌ای که توان مصرفی آن حداکثر گردد، ابتدا رابطه توان مصرفی در مقاومت R را می‌یابیم. برای این منظور با استفاده از قانون KVL جریان مدار را تعیین می‌کنیم.

$$۴۰=(۸+R)I$$
$$I=\frac{۴۰}{۸+R}$$

توان مصرفی در مقاومت R برابر است با:

$$P_R=R\cdot I^۲=R\left(\frac{۴۰}{۸+R}\right)^۲=\frac{۱۶۰۰R}{(۸+R)^۲}$$

برای تعیین مقدار R متناسب با حداکثر توان مصرفی باید ${dP_R}/{dR}$ را محاسبه نموده و مساوی صفر قرار دهیم. لذا،



شکل (۳-۲۹): مدار هم‌ارز تونن معادل با شکل (۳-۲۷)

$$dP_R/dR = \frac{۱۶۰۰(۸+R)^۲ - ۲(۸+R)۱۶۰۰R}{(۸+R)^۴} = o$$

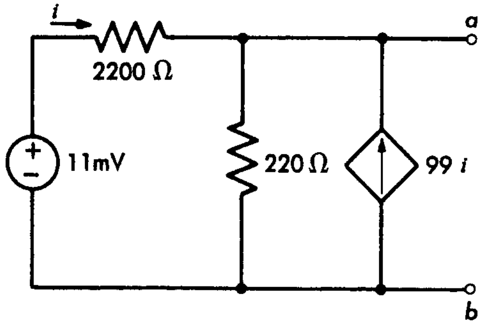
از حل این معادله اخیر، مقدار R برابر ۸Ω به‌دست می‌آید. پس به‌ازای این مقاومت، حداکثر توان مصرفی در آن ایجاد می‌شود. برای تعیین مقدار حداکثر توان مصرفی، کافی است که در مدار شکل (۳-۲۹) مقدار R را برابر ۸Ω انتخاب نموده و ابتدا جریان مدار را بیابیم:

$$I_{\max} = \frac{۴۰}{۸+۸} = ۲/۵\text{A}$$

سپس توان حداکثر در مقاومت $R = ۸\Omega$ برابر است با:

$$P_{R,\max} = R \cdot I_{\max}^۲ = ۸ \times ۲/۵^۲ = ۵۰\text{W}$$

تمرین (۳-۱۰): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۳۰) مفروض است. در این مدار، هم‌ارز تونن مدار را از دو سر a و b بیابید.



شکل (۳-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱۰)

جواب: $i_{sc} = ۰/۵\text{mA}$ ، $R_{th} = ۲۰\,\Omega$

۳-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل، اصول کلی روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی خطی تغییرناپذیر با زمان را بیان نمودیم. چهار روش اساسی در تحلیل این نوع مدارها، روش‌های تحلیل مش، گره، جمع‌آثار و روش هم‌ارز تونن و نورتن می‌باشد. خلاصه مطالب این روش‌ها به‌صورت موارد زیر ارائه می‌گردد:

● در روش تجزیه و تحلیل مش، برای مدار الکتریکی با m مش، قانون KVL را برای m مش مدار می‌نویسیم. در نتیجه m معادله به‌دست می‌آید که متغیرهای آن، m جریان هر مش می‌باشد. با حل این معادلات، جریان این مش‌ها به‌دست می‌آید و سپس دیگر متغیرهای مدار قابل محاسبه خواهد بود.

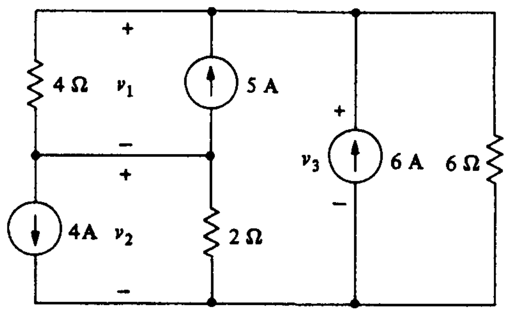
● روش تجزیه و تحلیل گره، بر مبنای نوشتن معادلات KCL برای n گره از $n+1$ گره مدار می‌باشد؛ زیرا در این روش باید یک گره به‌عنوان گره مبنا در نظر گرفته شود. با حل n معادله به‌دست آمده از اجرای قانون KCL برای n گره، ولتاژ تمام گره‌های مدار محاسبه می‌شوند.

● یکی از روش‌های موثر در حل مدارهای خطی، استفاده از روش جمع‌آثار است. در این روش، پاسخ مدار به‌ازای تک‌تک منابع مستقل مدار محاسبه می‌شود. سپس پاسخ نهایی مدار از جمع جبری پاسخ مدار به‌ازای تک‌تک منابع به‌دست می‌آید. در این روش، برای بی‌اثر کردن منابع ولتاژی، باید دو سر آن اتصال کوتاه شود. همچنین برای بی‌اثر بودن منابع جریانی، باید دو سر آن باز شده و به‌عبارت دیگر، از مدار، قطع گردد.

● در بعضی از روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی، مناسب است تا قسمتی از مدار که از اهمیت کم‌تری برخوردار است، تا حد امکان ساده گردد. در این حالت، از مدارهای هم‌ارز تونن و نورتن استفاده می‌شود. در روش هم‌ارز تونن، مدار معادل به‌صورت یک منبع ولتاژ v_{oc} سری با یک مقاومت R_{th} در می‌آید؛ در حالی که در روش هم‌ارز نورتن، مدار معادل از یک منبع جریان i_{sc} موازی با همان مقاومت R_{th} تشکیل می‌شود.

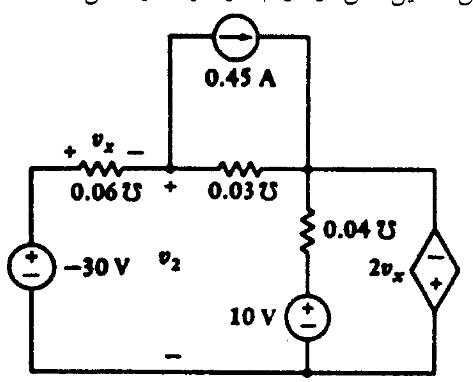
۳-۷- مسائل مروری

۱- با استفاده از روش تحلیل گره، متغیرهای v_1 و v_2 و v_3 را در مدار الکتریکی شکل (۳-۳۱) بیابید.



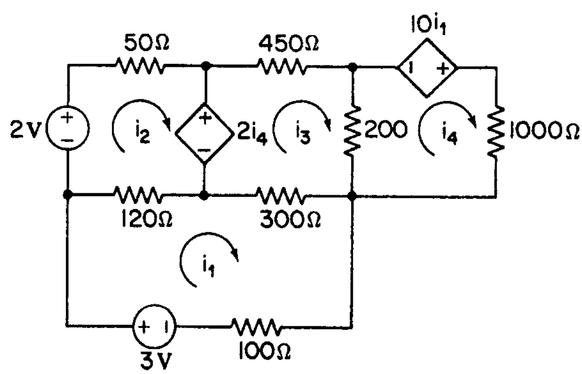
شکل (۳-۳۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- با استفاده از روش تحلیل مش، ولتاژ v_2 را در مدار شکل (۳-۳۲) تعیین کنید.



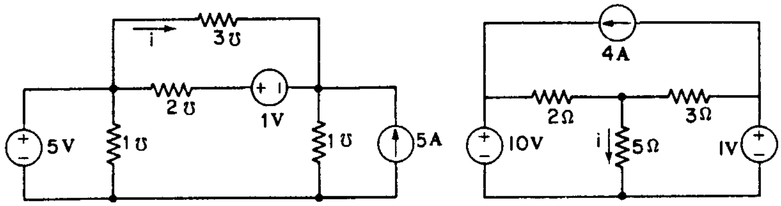
شکل (۳-۳۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۳۳) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل مش، جریان‌های i_1 تا i_4 را بیابید.



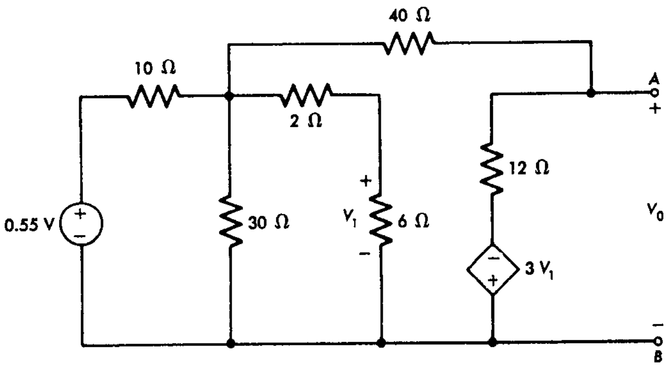
شکل (۳-۳۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در دو مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۳۴)، مقدار جریان i را از هر دو روش تحلیل مش و گره مشخص کنید.



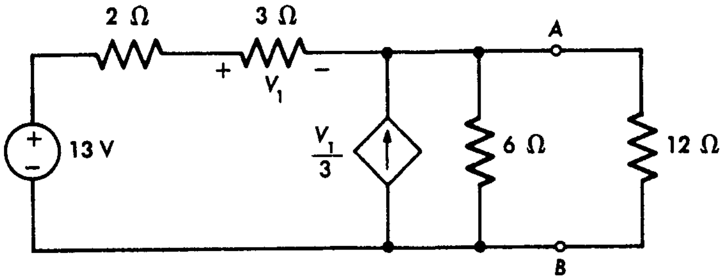
شکل (۳-۳۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۳۵) با استفاده از روش تحلیل مش و گره ولتاژ v_o را تعیین کنید.



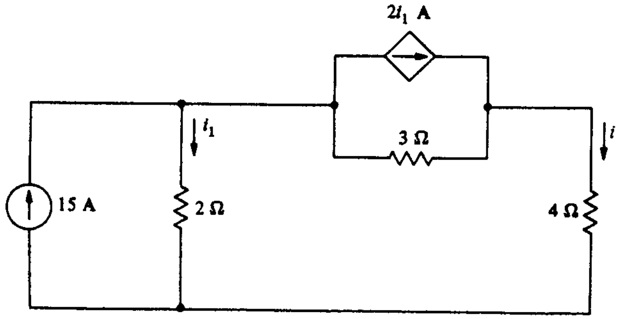
شکل (۳-۳۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- شکل (۳-۳۶) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ دو سر مقاومت ۱۲Ω را بیابید.



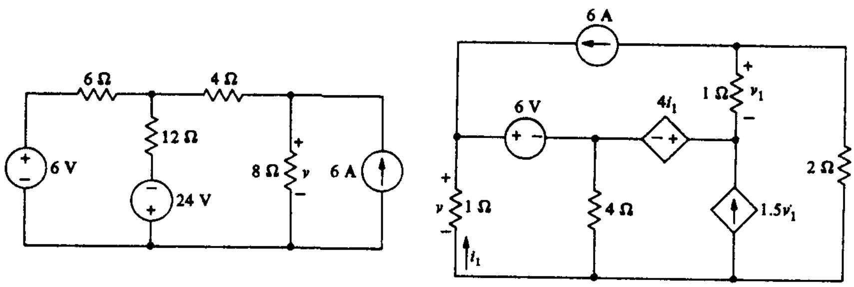
شکل (۳-۳۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

۷- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۳۷) جریان i را از روش تحلیل گره بیابید.



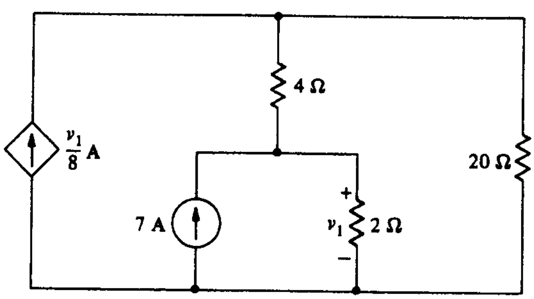
شکل (۳-۳۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- مدارهای الکتریکی در شکل (۳-۳۸) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ v را در هر دو مدار بیابید.



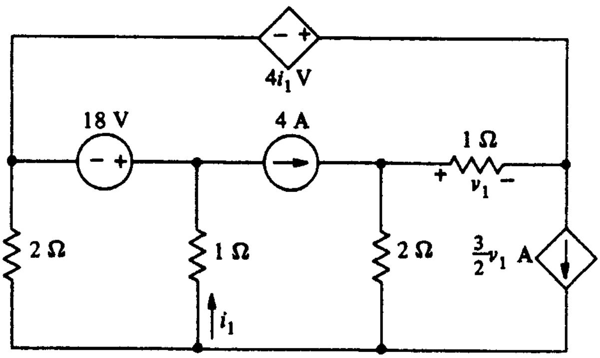
شکل (۳-۳۸): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- با استفاده از روش تحلیل گره مش، توان تلف شده در مقاومت 4Ω را در مدار الکتریکی شکل (۳-۳۹) تعیین کنید.



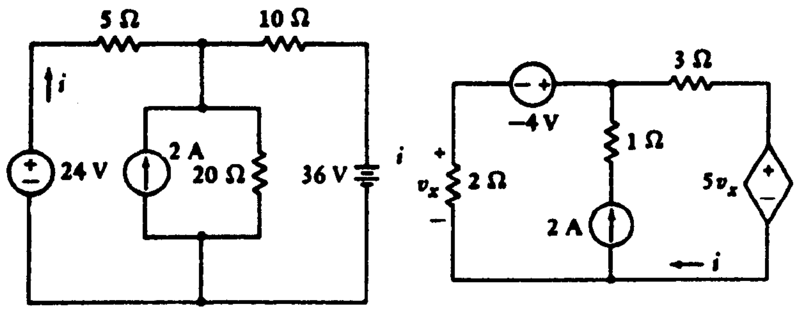
شکل (۳-۳۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۴۰) ولتاژ v_1 را از روش تحلیل گره بیابید.



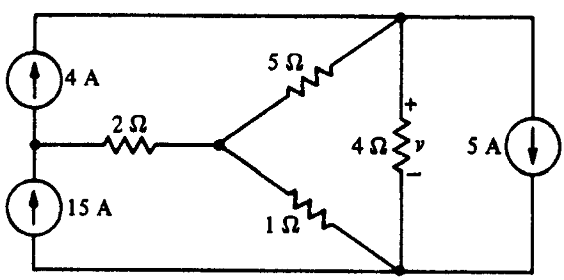
شکل (۳-۴۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱-در دو مدار ارائه‌شده در شکل (۳-۴۱) با استفاده از روش جمع‌آثار، جریان i را بیابید.



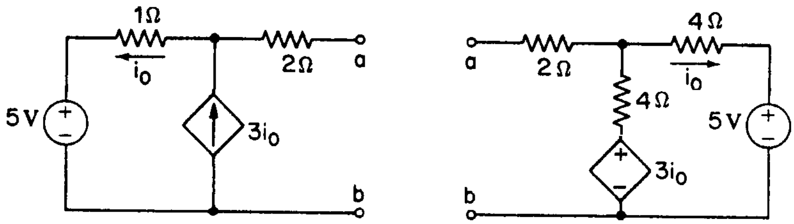
شکل (۳-۴۱): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)

۱۲- با استفاده از روش جمع‌آثار، مقدار ولتاژ v را در مدار الکتریکی شکل (۳-۴۲) بیابید.



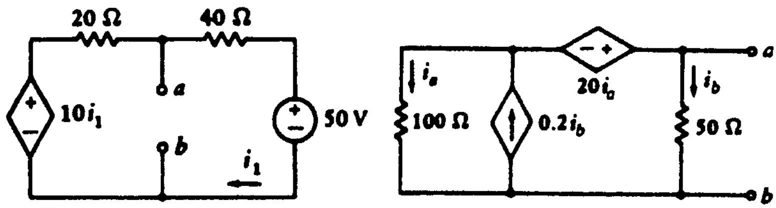
شکل (۳-۴۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۲)

۱۳- در شکل (۳-۴۳) دو مدار الکتریکی مشخص شده است. در این دو مدار، مدار هم‌ارز تونن را از دو سر a و b بیابید.



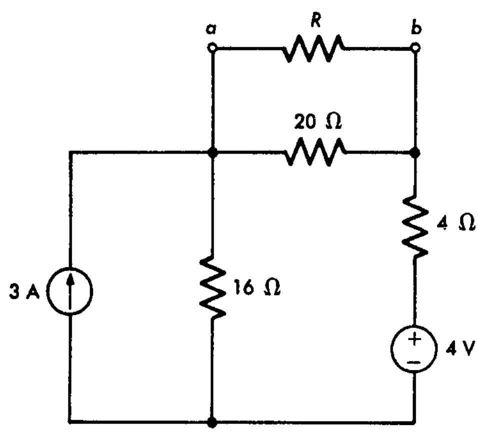
شکل (۳-۴۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۳)

۱۴- در دو مدار ارائه‌شده در شکل (۳-۴۴) مدار هم‌ارز تونن از دو سر a و b را بیابید.



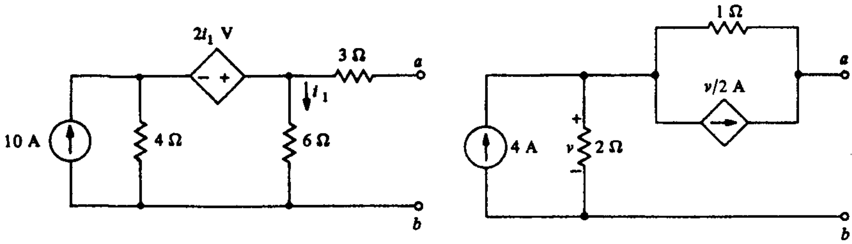
شکل (۳-۴۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۴)

۱۵- در شکل (۳-۴۵) یک مدار الکتریکی نشان داده شده است. با استفاده از مدار هم‌ارز تونن از دو سر a و b ، مقدار R را به‌گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان در مقاومت R تلف گردد. مقدار حداکثر توان تلفاتی چقدر خواهد بود.



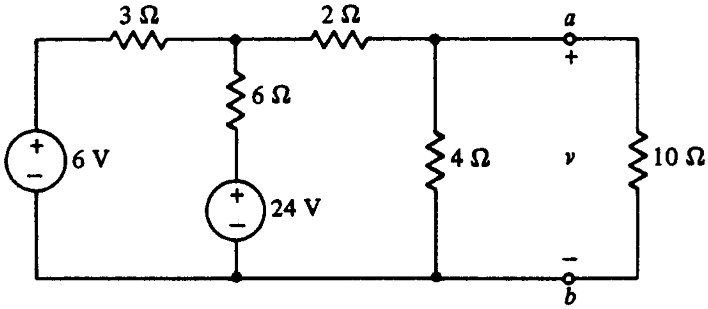
شکل (۳-۴۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۵)

۱۶- در مدارهای الکتریکی شکل (۳-۴۶) مدار هم‌ارز نورتن را از دو سر a و b بیابید.



شکل (۳-۴۶): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۶)

۱۷- مدار هم‌ارز تونـن از دو سر a و b را بـرای مـدار الکـتریکی مشخص شده در شکل (۳-۴۷) تعیین کنید. سپس ولتاژ v را بیابید.



شکل (۳-۴۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۷)