

## فصل دوم

### منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی

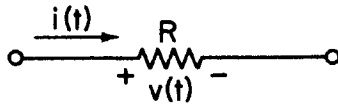
#### ۲-۱- مقدمه

از عناصر مهم و اساسی در مدارهای الکتریکی می‌توان به منابع الکتریکی و مقاومت‌ها اشاره نمود. این منابع به دو نوع منابع جریان و ولتاژ تقسیم می‌شوند که در این فصل به آنها اشاره خواهیم نمود. همچنین با اتصال این منابع الکتریکی به مقاومت‌ها می‌توانیم مدارهای الکتریکی ساده‌ای را ایجاد نماییم. لذا این منابع و مقاومت‌ها را می‌توان به‌عنوان اجزاء مدار قلم‌داد نمود. در فصل چهارم، با دو نوع دیگر از عناصر مدار آشنا خواهیم شد که با نام‌های سلف و خازن مشخص می‌شوند. به این عناصر، عناصر دو سر می‌گویند. همچنین با خواص ساده‌سازی مدارها از قبیل سری و موازی شدن مقاومت‌ها آشنا خواهیم شد. در فصول بعدی با تکمیل شدن عناصر مدارها، تحلیل جامع‌تری از این مدارها به روش‌های مختلف بیان می‌شود.

#### ۲-۲- مقاومت‌های الکتریکی

یکی از اساسی‌ترین عناصر در هر مدار الکتریکی، مقاومت‌ها می‌باشند که نمایش این عنصر مطابق با شکل (۲-۱) می‌باشد. با توجه به آنکه عناصر موردنظر در این کتاب، از نوع خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشند لذا ارتباط بین متغیرهای ولتاژ دو سر مقاومت و جریان عبوری از آن را به‌صورت خطی و بر اساس معادله زیر در نظر می‌گیریم:

$$v(t) = R.i(t) \quad \text{یا} \quad i(t) = G.v(t) \quad (2-1)$$

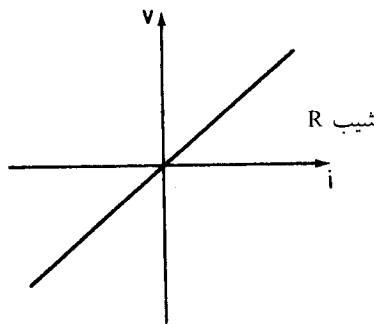


شکل (۱-۲): نمایش عنصر مقاومت با ولتاژ و جریان آن

که در این رابطه داریم:

$$G = \frac{1}{R} \quad (۲-۲)$$

به مقدار  $R$ ، مقاومت الکتریکی<sup>۱</sup> و به  $G$  رسانایی<sup>۲</sup> می‌گویند. این رابطه حاکم بر عنصر مقاومت را می‌توان به صورت مشخصه  $v-i$  در شکل (۲-۲) نیز مشاهده نمود. این مقاومت، مستقل از زمان و جریان اعمالی است. به عبارت دیگر این مقاومت بیان می‌کند که با ولتاژ اعمالی  $v(t)$  به آن، چه جریانی از مقاومت عبور می‌کند. واحد این مقاومت را اهم<sup>۳</sup> می‌نامیم و با  $\Omega$  نشان می‌دهیم. با استفاده از رابطه (۱-۲) در می‌یابیم که  $1\Omega$  معرف مقدار یک ولت بر یک آمپر (یا  $1V/1A$ ) می‌باشد. لازم به ذکر است که در بسیاری مواقع، به جای استفاده از مقاومت، از متغیر رسانایی  $G$  استفاده می‌شود که واحد آن مهو<sup>۴</sup> بوده و با  $\mathcal{U}=1/\Omega$  نشان می‌دهیم.



شکل (۲-۲): مشخصه یک مقاومت خطی

بر اساس مطالب ارائه شده در فصل اول، و بر اساس رابطه (۱-۲)، توان تلف شده در این مقاومت به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$p(t) = v(t).i(t) = (R.i(t)).i(t) = R.i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (W) \quad (۳-۲)$$

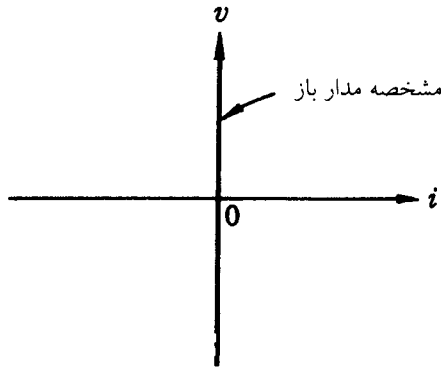
<sup>۱</sup> - Resistance

<sup>۲</sup> - Conductance

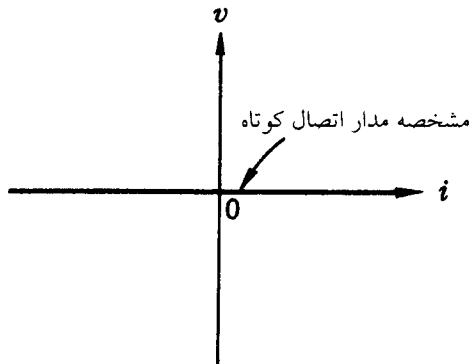
<sup>۳</sup> - Ohm

<sup>۴</sup> - Mho

دو نمونه کاربردی از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، عنصر مدار باز<sup>۱</sup> و عنصر مدار اتصال کوتاه<sup>۲</sup> می‌باشند. یک عنصر دو سر را مدار باز می‌گویند، اگر به‌ازای همه ولتاژهای دو سر عنصر، جریان عبوری از آن برابر صفر باشد. مشخصه  $v-i$  این عنصر را می‌توان در شکل (۳-۲) مشاهده نمود. بر اساس این شکل، مشخصه  $v-i$  دارای یک شیب بینهایت است یا به عبارت دیگر،  $R = \infty$  یا  $G = 0$  می‌باشد. از طرف دیگر، یک عنصر دو سر را مدار اتصال کوتاه می‌گویند، هر گاه ولتاژ دو سر آن با عبور جریان دلخواه از آن، برابر صفر باشد. مشخصه  $v-i$  این عنصر را می‌توان در شکل (۴-۲) مشاهده نمود که دارای شیب صفر می‌باشد؛ یعنی،  $R = 0$  یا  $G = \infty$  خواهد بود.



شکل (۳-۲): مشخصه  $v-i$  یک عنصر مدار باز



شکل (۴-۲): مشخصه  $v-i$  یک عنصر مدار اتصال کوتاه

<sup>۱</sup>- Open Circuit

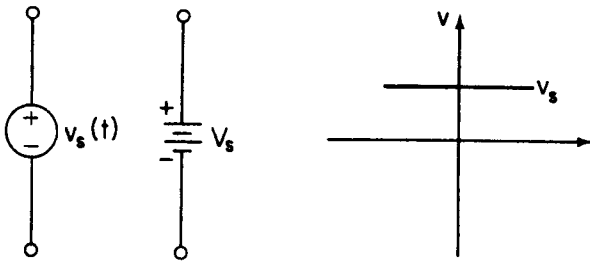
<sup>۲</sup>- Short Circuit

## ۳-۲- منابع الکتریکی

منابع الکتریکی در هر مدار، عناصری هستند که انرژی الکتریکی را تولید می‌کنند تا در عناصر دیگر مدار، از جمله مقاومت‌ها مصرف شوند تا اصل بقای انرژی برقرار گردد. این منابع الکتریکی به دو نوع منابع الکتریکی مستقل<sup>۱</sup> و وابسته<sup>۲</sup> تقسیم می‌شوند که در این بخش به آنها اشاره خواهیم کرد.

### ۳-۲-۱- منابع الکتریکی مستقل

منابع الکتریکی مستقل به منابعی گفته می‌شوند که مقدار ولتاژ یا جریان تولیدی منبع، مستقل از بار اتصال یافته به منبع می‌باشد. این منابع الکتریکی مستقل به دو نوع منابع ولتاژ و جریان تقسیم‌بندی می‌شوند که نمایش منابع ولتاژی به همراه مشخصه تولیدی آن در شکل (۲-۵) نشان داده شده است. همان‌گونه که از مشخصه آن نیز پیداست، این منابع ولتاژ، تحت هر جریانی که از آن عبور می‌کند، دارای ولتاژی به مقدار  $v_s(t)$  است. البته اگر ولتاژ  $v_s(t)$  بر حسب زمان تغییر کند، مثلاً یک تابع سینوسی باشد، مفهوم ثابت بودن ولتاژ منبع و وابسته نبودن به جریان عبوری از آن به این معنا است که  $v_s(t)$  دائماً و تحت هر نوع بار متصل به آن، شکل ثابت (مثلاً سینوسی بودن) منحنی ولتاژ تولیدی را خواهد داشت. به عبارت دیگر، مقاومت داخلی این منبع ولتاژ، برابر صفر فرض می‌شود. لذا به این منبع ولتاژ، منبع ولتاژ ایده‌آل نیز می‌گویند.



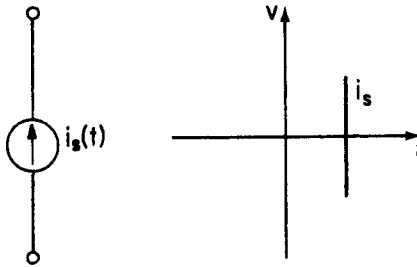
شکل (۲-۵): منبع الکتریکی ولتاژی مستقل و مشخصه آن

این مطالب را می‌توان در مورد منابع جریان مستقل نیز بیان نمود. منبع جریان ایده‌آل و مستقل به این معنی است که جریان تولیدی این منبع، مستقل از بار اتصالی به آن بوده و

<sup>۱</sup>- Independent Sources

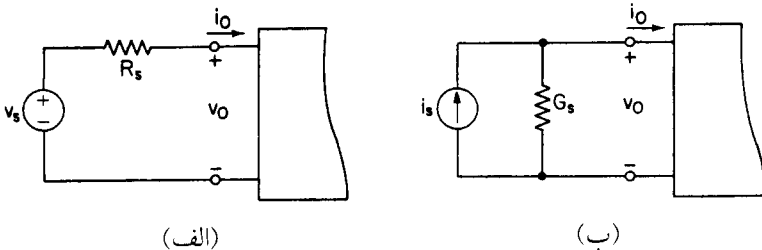
<sup>۲</sup>- Dependent Sources

مقدار آن همیشه برابر مقدار ثابت  $i_s(t)$  است. نحوه نمایش این منبع ایده‌آل به همراه مشخصه آن در شکل (۶-۲) آمده است.



شکل (۶-۲): منبع الکتریکی جریانی مستقل و مشخصه آن

در مدارهای الکتریکی واقعی، به هیچ وجه نمی‌توان منابع الکتریکی ایده‌آل را ایجاد نمود. به عبارت دیگر، هیچ منبع ولتاژی را نمی‌توان یافت که ولتاژ دو سر آن با تغییر بار اتصالی به آن، ثابت باشد. یعنی برای هر منبع واقعی ولتاژی، باید یک مقاومت داخلی با منبع ولتاژی  $v_s(t)$  در نظر گرفت که این مقاومت، معمولاً مقدار بسیار کوچکی می‌باشد. این موضوع در شکل (۷-۲-الف) نشان داده شده است. همین موضوع را می‌توان برای منابع واقعی جریان نیز بیان نمود. به عبارت دیگر در عمل، هیچ منبع جریانی را نمی‌توان یافت که با تغییر بار الکتریکی متصل به آن، جریان تولیدی آن نیز ثابت باشد. برای نمایش نحوه تغییرات جریان تولیدی توسط منبع واقعی جریان، از یک مقاومت موازی با منبع استفاده می‌شود که با تغییر بار، مقدار جریان عبوری از آن نیز تغییر می‌کند. در شکل (۷-۲-ب) یک منبع واقعی جریان نشان داده شده است.



شکل (۷-۲): منابع مستقل واقعی؛ (الف) منبع ولتاژ، (ب) منبع جریان

برای تعیین مشخصه  $v-i$  در یک منبع واقعی ولتاژی کافی است که قانون KVL را برای شکل (۷-۲-الف) بیان کنیم که،

$$v_o(t) = v_s(t) - R_s \cdot i_o(t)$$

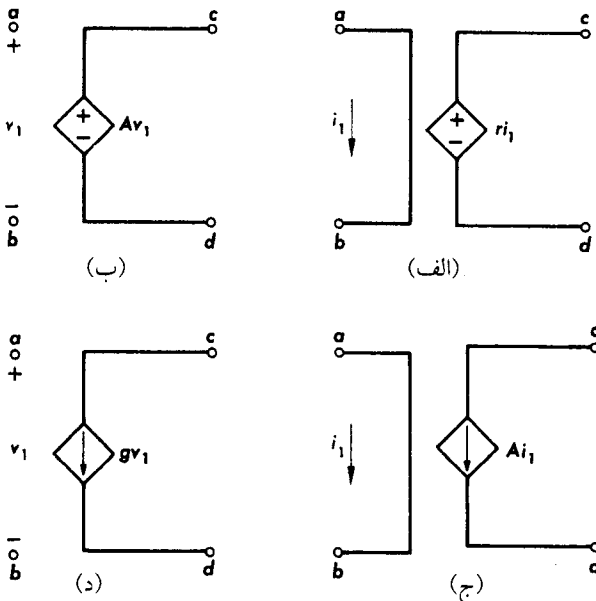
این رابطه نشان می‌دهد که با افزایش جریان بار متصل شده به منبع، ولتاژ دو سر بار (که همان ولتاژ خروجی منبع واقعی و ولتاژی است) افزایش می‌یابد. همچنین با استفاده از قانون KCL برای مدار ارائه شده در شکل (۲-۷-ب) داریم:

$$i_o(t) = i_s(t) - G_s \cdot v_o(t)$$

از این رابطه درمی‌یابیم در صورتی که ولتاژ دو سر بار کاهش یابد، جریان تزریقی به بار (که همان جریان خروجی از منبع واقعی جریان است) کاهش می‌یابد.

### ۲-۳-۲- منابع الکتریکی وابسته

دسته دیگری از منابع الکتریکی که در مدارها به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند، منابع الکتریکی وابسته می‌باشند. خصوصیات اصلی این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان به جریان یا ولتاژ عنصر دیگری از مدار، وابسته می‌باشند. به همین خاطر، نام دیگر این منابع وابسته را منابع کنترل شونده نیز می‌گویند. شکل (۲-۸) چهار نوع این منابع را نشان می‌دهد. عناصر قرار گرفته در سرهای a و b، بیانگر متغیر کنترل کننده می‌باشند و عناصر قرار گرفته در سرهای c و d، نشان دهنده متغیر کنترل شونده (که ولتاژ یا جریان خروجی



شکل (۲-۸): چهار نوع منبع الکتریکی وابسته

منبع است) می‌باشد. بر این اساس، شکل‌های (الف و ب) بترتیب منبع ولتاژی وابسته به جریان و منبع ولتاژی وابسته به ولتاژ را نشان می‌دهد. همچنین در شکل‌های (ج و د) بترتیب منبع جریانی وابسته به جریان و منبع جریانی وابسته به ولتاژ مشخص شده است. لازم به ذکر است که این نوع منابع، به صورت منابع وابسته ایده‌آل می‌باشند. برای مشخص شدن نحوه عملکرد این نوع منابع، یکی از آنها را بررسی می‌کنیم. به عنوان نمونه در شکل (۲-۸-الف) اگر جریان عنصر مورد نظر (که همان  $i_1(t)$  است) تغییر کند، آنگاه ولتاژ منبع وابسته به مقدار  $i_1(t)$  برابر جریان  $i_1(t)$  (یعنی  $f \cdot i_1(t)$ ) تغییر می‌کند. این موضوع را می‌توان برای شکل‌های (ب) تا (د) نیز به شکل مناسب بیان نمود.

## ۲-۴- مدار معادل تونن و نورتن

در بخش (۲-۳-۱) مدل واقعی منابع الکتریکی مستقل جریانی و ولتاژی را ارائه نمودیم. در مدارهای الکتریکی، این منابع الکتریکی را می‌توان برحسب نوع دیگر آن، معادل‌سازی نمود. به عبارت دیگر هر کدام از منابع ارائه شده در شکل (۲-۷) را می‌توان به نوع دیگر آن تبدیل نمود. این معادل‌سازی با استفاده از روابط ارائه شده برای هر کدام از منابع مستقل واقعی امکان‌پذیر خواهد بود. به عنوان مثال برای یک منبع واقعی ولتاژ و جریان در شکل (۲-۷) داشتیم:

$$(۲-۶) \quad \text{منبع ولتاژ: } v_o(t) = v_s(t) - R_s \cdot i_o(t)$$

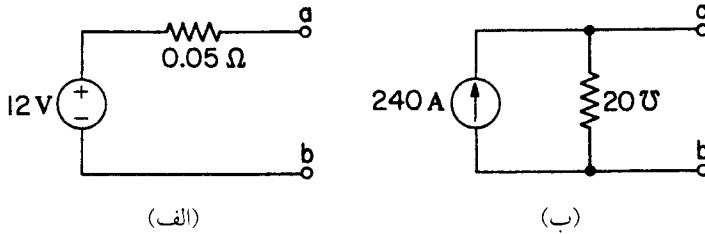
$$(۲-۷) \quad \text{منبع جریان: } i_o(t) = i_s(t) - G_s \cdot v_o(t)$$

از مقایسه این دو معادله درمی‌یابیم که برای معادل‌سازی یک منبع جریان با معادله (۲-۷) به یک منبع ولتاژ با معادله (۲-۶) باید شرایط زیر برقرار گردد:

$$v_s(t) = \frac{i_s(t)}{G_s} = R_s \cdot i_s(t)$$

به عبارت دیگر، موازی بودن یک منبع جریان ایده‌آل  $i_s(t)$  با مقاومت  $R_s$  تبدیل به یک منبع ولتاژ واقعی با ولتاژ ایده‌آل  $v_s(t) = R_s \cdot i_s(t)$  می‌شود که با مقاومت  $R_s$  سری شده باشد. به مدل منبع الکتریکی به صورت منبع جریان موازی شده با مقاومت، مدار معادل نورتن می‌گویند و به مدل منبع به صورت ولتاژ سری شده با مقاومت، مدار معادل تونن می‌گویند. این موضوع را به طور مفصل‌تر در فصل‌های بعدی بحث می‌کنیم.

مثال (۲-۱): در صورتی که یک منبع الکتریکی با مدل ارائه شده در شکل (۲-۹-الف) بر اساس مدار معادل تونن باشد، مدار معادل نورتن آن را بیابید.



شکل (۹-۲): (الف) مدار معادل تونن؛ (ب) مدار معادل نورتن

حل: برای تعیین منبع جریان معادل با شکل (۹-۲-الف) خواهیم داشت:

$$i_s(t) = \frac{v_s(t)}{R_s} = \frac{12}{0.05} = 240 \text{ A}$$

که این منبع جریان با یک مقاومت الکتریکی با رسانایی  $20 \text{ S}$  موازی می‌شود.  
( $G_s = 20 \text{ S}$ )

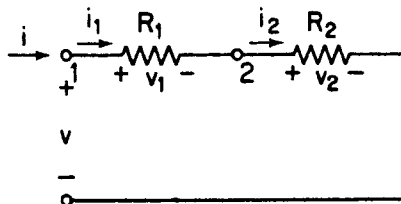
## ۲-۵- مفاهیم سری و موازی مقاومتها و ساده سازی آنان

در این بخش می‌خواهیم اتصالات سری و موازی مقاومتها را مورد بررسی قرار داده و این نوع مدارها را ساده‌سازی کنیم.

### ۲-۵-۱- اتصال سری مقاومتها

شکل (۲-۱۰) اتصال سری دو مقاومت  $R_1$  و  $R_2$  را نشان می‌دهد. مفهوم سری بودن دو مقاومت به این معنا است که جریان عبوری از هر دو مقاومت، با هم مساوی باشند. این موضوع را می‌توان با استفاده از قانون KCL برای هر دو گره ۱ و ۲ نیز نشان داد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) \quad (۹-۲)$$



شکل (۲-۱۰): اتصال سری دو مقاومت



همچنین با استفاده از قانون KVL خواهیم داشت:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (10-2)$$

حال با توجه به تعریف رابطه  $v-i$  در دو سر هر مقاومت و با استفاده از رابطه (۲-۱) برای هر یک از مقاومت‌ها روابط زیر را داریم:

$$v_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) \quad (11-2)$$

$$v_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad (12-2)$$

اکنون با جایگذاری دو رابطه اخیر در معادله (۲-۱۰) نتیجه می‌گیریم که:

$$v(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t)$$

$$v(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t) \quad (13-2)$$

حال اگر بخواهیم به جای مقاومت‌های  $R_1$  و  $R_2$ ، یک مقاومت معادل  $R_{eq}$  قرار دهیم که مشخصه  $v-i$  مدار (که همان ارتباط بین  $v(t)$  و  $i(t)$  است) تغییری نکند باید رابطه زیر صادق باشد:

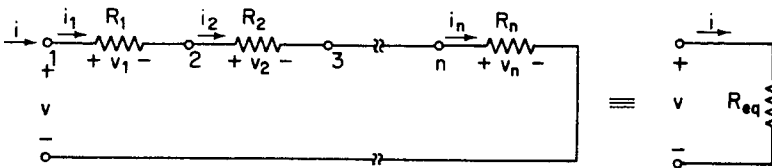
$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (14-2)$$

این مطالب را می‌توان برای اتصال سری  $n$  مقاومت نیز بیان نمود که در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده است. با استفاده از قانون KCL برای  $n$  گره ۱ تا  $n$  خواهیم داشت:

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t) \quad (15-2)$$

همچنین با استفاده از قانون KVL داریم:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \quad (16-2)$$



شکل (۲-۱۱): اتصال سری  $n$  مقاومت

حال با توجه به آنکه رابطه زیر برای هر مقاومت را داریم:

$$v_i(t) = R_i \cdot i_i(t) = R_i \cdot i(t) \quad (17-2)$$

در نتیجه با جایگذاری در رابطه (۲-۱۶) خواهیم داشت:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n R_i \cdot i_i(t) = i(t) \sum_{i=1}^n R_i \quad (18-2)$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم که  $n$  مقاومت سری دارای مقاومت معادلی به صورت زیر خواهد بود:

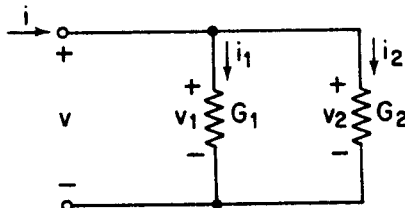
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (19-2)$$

با جایگذاری مقاومت معادل  $R_{eq}$  به جای مقاومت‌های  $R_1$  تا  $R_n$ ، مشخصه  $v-i$  مدار در هر دو حالت شکل (۱۱-۲) با یکدیگر مساوی خواهد بود.

### ۲-۵-۲- اتصال موازی مقاومت‌ها

مشابه بخش (۲-۵-۱)، این بار اتصال موازی مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل (۱۲-۲) اتصال موازی دو مقاومت با رسانایی  $G_1$  و  $G_2$  (یا با مقاومت‌های  $R_1 = 1/G_1$  و  $R_2 = 1/G_2$ ) را نشان می‌دهد. مفهوم موازی بودن این دو مقاومت به این معنی است که ولتاژ دو سر آنها در هر لحظه با هم مساوی و به مقدار یکسان  $v(t)$  خواهد بود. یعنی،

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) \quad (20-2)$$



شکل (۱۲-۲): اتصال موازی دو مقاومت

حال به دنبال آن هستیم که به جای این دو مقاومت، مقاومت معادلی قرار دهیم که همان مشخصه  $v-i$  مدار را داشته باشد. بدین منظور با استفاده از قانون KCL در گره مدار خواهیم داشت:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (21-2)$$

با توجه به آنکه برای دو مقاومت مدار روابط زیر حاکم است:

$$i_1(t) = G_1 \cdot v_1(t) \quad (22-2)$$

$$i_2(t) = G_2 \cdot v_2(t) \quad (23-2)$$

لذا با استفاده از دو معادله اخیر در معادله (۲۱-۲) به دست می‌آوریم که:

$$i(t) = G_1 \cdot v_1(t) + G_2 \cdot v_2(t) = (G_1 + G_2) \cdot v(t) \quad (24-2)$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (25-2)$$

این معادلسازی را می‌توان برای موازی بودن  $n$  مقاومت مطابق با شکل (۲-۱۳) هم انجام داد. مشابه حالت دو مقاومت موازی با استفاده از قوانین KVL و KCL داریم:

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) = \dots = v_n(t) \quad (26-2)$$

$$i(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) \quad (27-2)$$

با توجه به آنکه برای هر مقاومت،  $i_i(t) = G_i \cdot v(t)$  را داریم، لذا با جایگذاری در معادله (۲۷-۲) می‌توان نوشت:

$$i(t) = v(t) \sum_{i=1}^n G_i \quad (28-2)$$

در نهایت با تعریف:

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i \quad (29-2)$$

مشخصه  $v-i$  نهایی سیستم برابر است با:

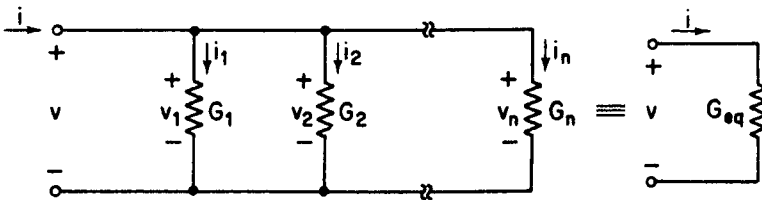
$$i(t) = G_{eq} \cdot v(t) \quad (30-2)$$

رابطه (۲۹-۲) را می‌توان بر اساس مقاومت عناصر نیز به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (31-2)$$

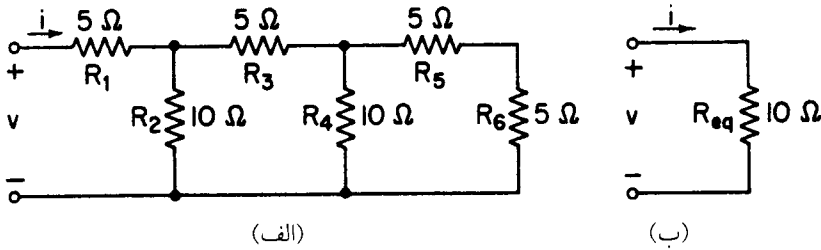
که این رابطه برای دو مقاومت موازی به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (32-2)$$



شکل (۲-۱۳): اتصال موازی  $n$  مقاومت

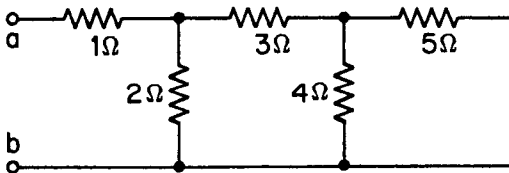
مثال (۲-۲): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۱۴-الف) مورد نظر است. با استفاده از خواص سری و موازی مقاومت‌ها، مقاومت معادل را بیابید.



شکل (۲-۱۴): الف) مدار الکتریکی سری و موازی؛ ب) مدار الکتریکی معادل

حل: ابتدا مقاومت‌های  $R_5$  با  $R_6$  سری هستند که برآیند آنها برابر  $10\Omega$  می‌شود. سپس این مقاومت با مقاومت  $R_4 = 10\Omega$  موازی می‌شود که برآیند آنها  $5\Omega$  خواهد شد. این روند را تا دو سر مدار ادامه می‌دهیم تا در نهایت به مقاومت معادل  $R_{eq} = 10\Omega$  می‌رسیم که در شکل (۲-۱۴) ب) نشان داده شده است.

تمرین (۲-۱): مقاومت معادل مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۱۵) را بیابید.



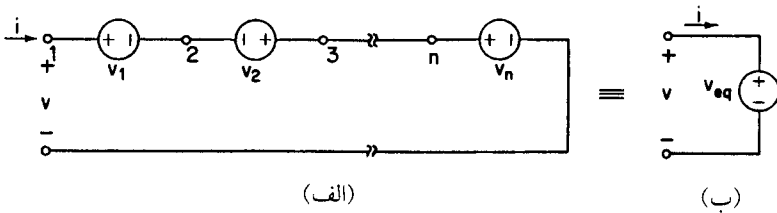
شکل (۲-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۱)

جواب:  $R_{eq} = 159/60 \Omega \cong 2/45 \Omega$

## ۲-۶- مفاهیم سری و موازی منابع الکتریکی

در این بخش می‌خواهیم نحوه معادل‌سازی سری و موازی منابع ولتاژ و جریان را بیان نماییم. مشابه شکل (۲-۱۶) فرض کنید که  $n$  منبع ولتاژی با مقادیر  $v_1$  تا  $v_n$  با هم سری شده باشند؛ به این معنی که جریان عبوری از تمام منابع، یکسان است. حال با استفاده از قانون KVL به این نتیجه می‌رسیم که برای معادل‌سازی این  $n$  منبع با یک منبع معادل با ولتاژ  $v_{eq}(t)$  خواهیم داشت:

$$v_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \quad (2-32)$$

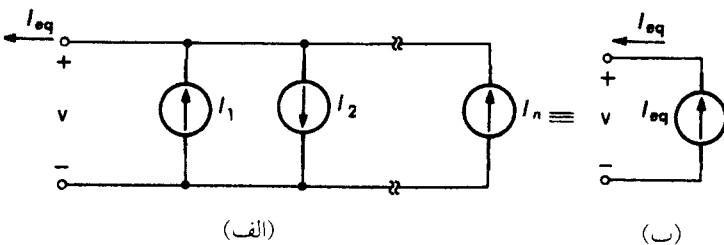


شکل (۲-۱۶): الف) اتصال سری  $n$  منبع ولتاژ؛ ب) منبع ولتاژ معادل

لازم به ذکر است که اپراتور  $\sum$  به معنای جمع جبری است و در صورتی که در یک نقطه از اتصال منابع، پلاریته‌های (قطب‌های) همنام به هم وصل شوند، باید ولتاژ دو منبع متوالی مورد نظر از هم کم شوند. این موضوع را می‌توان برای موازی بودن  $n$  منبع جریان نیز ارائه نمود. بدین منظور شکل (۲-۱۷) را در نظر بگیرید که با استفاده از قانون KCL و به منظور معادلسازی این  $n$  منبع با یک منبع جریان  $I_{eq}(t)$  خواهیم داشت:

$$I_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n I_i(t) = I_1(t) - I_2(t) + \dots + I_n(t) \quad (2-33)$$

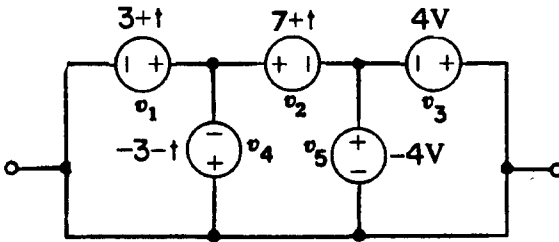
لازم به ذکر است در صورتی که  $n$  منبع ایده‌آل ولتاژی به‌طور موازی با هم قرار گیرند حتماً باید ولتاژ آنان با هم مساوی باشند و در نتیجه، منبع ولتاژ معادل این  $n$  منبع، یک منبع ولتاژ با مقدار مساوی و مشابه  $n$  منبع خواهد بود. در غیر این صورت، اتصال موازی  $n$  منبع ایده‌آل ولتاژی با مقادیر مختلف ولتاژی و اتصال سری  $n$  منبع ایده‌آل جریانی با جریان‌های متفاوت تعریف نشده است.



شکل (۲-۱۷): الف) اتصال موازی  $n$  منبع جریان؛ ب) منبع جریان معادل

مثال (۲-۳): در شکل (۲-۱۸). اتصال پنج منبع ولتاژی را با هم نشان می‌دهد. منبع ولتاژ معادل را بیابید.

حل: برای یافتن منبع معادل ولتاژی، باید قانون KVL را برای یک مسیر دلخواه بین نقاط ابتدا و انتهای مدار بنویسیم. بدین منظور اگر قانون KVL را از طریق منابع ۱، ۲ و ۳ بنویسیم خواهیم داشت:



شکل (۲-۱۸): اتصال سری و موازی منابع ولتاژی

$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) - (4) = 0V$$

حال اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۲ و ۵ بنویسیم داریم:

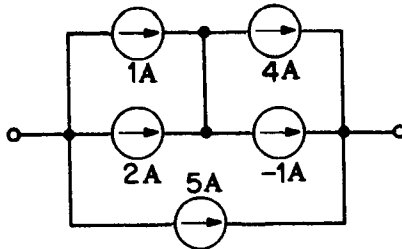
$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) + (-4) = 0V$$

همچنین اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۴، ۵ و ۳ بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$v_{eq}(t) = -(3+t) - (-3-t) - (-4) - (4) = 0V$$

بنابراین، منبع معادل بین دو سر ابتدایی و انتهایی، برابر صفر است.

تمرین (۲-۲): شکل (۲-۱۹)، ۵ منبع جریان در وضعیت‌های سری و موازی با هم قرار گرفته‌اند. منبع معادل جریانی را برای این منابع بیابید.



شکل (۲-۱۹): اتصال سری و موازی منابع جریانی

جواب:  $I_{eq}(t) = 8A$

## ۲-۷- مشخصات ولتاژ و جریان در مدارهای ساده الکتریکی

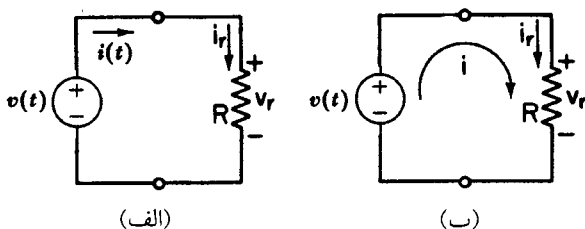
هدف از این بخش آن است که با اتصال منابع و مقاومت‌ها به یکدیگر، مشخصات ولتاژ و جریان هر یک از عناصر را بیان نماییم. بدین منظور یک مدار ساده مطابق شکل

(۲۰-۲) را در نظر بگیرید که یک منبع ولتاژ با یک مقاومت  $R$  سری شده باشد. با استفاده از کاربرد قانون KVL در شکل (۲۰-۲-الف) به این نتیجه می‌رسیم که  $v(t) = v_r(t)$  خواهد بود و با توجه به آنکه برای عنصر مقاومت رابطه  $v_r(t) = R \cdot i_r(t)$  وجود دارد، لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$v(t) = R \cdot i_r(t) \quad (۳۴-۲)$$

همچنین با استفاده از قانون KCL در شکل (۲۰-۲-ب) که همان شکل (۲۰-۲-الف) می‌باشد به این نتیجه می‌رسیم که  $i(t) = i_r(t)$  خواهد بود و لذا رابطه اخیر به صورت زیر تغییر می‌یابد:

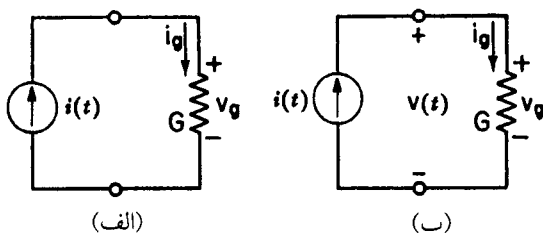
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (۳۵-۲)$$



شکل (۲۰-۲): مدار ساده شامل منبع ولتاژ و مقاومت

همین موضوع را می‌توان برای حالت موازی یک منبع جریان با یک مقاومت، مطابق با شکل (۲۱-۲) نیز بیان نمود. با استفاده از قانون KCL در شکل (۲۱-۲-الف) به این نتیجه می‌رسیم که  $i(t) = i_g(t)$  خواهد بود. همچنین با توجه به رابطه جریان با ولتاژ یک مقاومت که به صورت  $i_g(t) = G \cdot v_g(t)$  است، نتیجه می‌گیریم که،

$$i(t) = G \cdot v_g(t) \quad (۳۶-۲)$$



شکل (۲۱-۲): مدار ساده شامل منبع جریان و مقاومت

از طرف دیگر در شکل (۲۱-۲-ب) اگر قانون KVL را بیان کنیم به این نتیجه می‌رسیم که  $v(t) = v_g(t)$  خواهد بود. لذا رابطه اخیر به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$i(t) = G \cdot v(t) \quad (۳۷-۲)$$

که  $i(t)$  جریان منبع و  $v(t)$  ولتاژ دو سر منبع است.

در مدار ساده ارائه شده در شکل (۲-۲۲)، نحوه تقسیم ولتاژ بین مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از قانون KVL جریان  $i(t)$  منبع را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

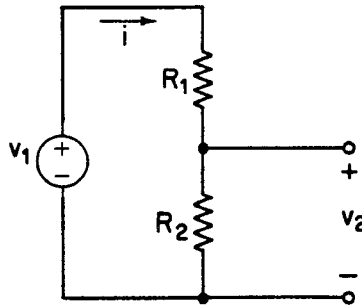
$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R_1 + R_2} \quad (۳۸-۲)$$

حال با توجه به آنکه ولتاژ دو سر مقاومت  $R_2$  برابر  $v_2(t) = R_2 \cdot i(t)$  خواهد بود لذا با استفاده از معادله (۲-۳۸)، ولتاژ  $v_2(t)$  را می‌توان به شکل زیر تعیین نمود:

$$v_2(t) = R_2 \cdot i(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1(t) \quad (۳۹-۲)$$

در نتیجه،

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (۴۰-۲)$$

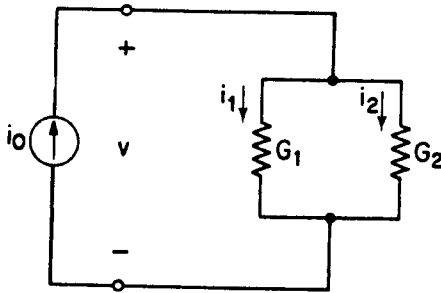


شکل (۲-۲۲): تقسیم ولتاژ بین دو مقاومت

لازم به ذکر است که این تقسیم‌بندی ولتاژ، وقتی صحیح است که جریان عبوری از هر دو مقاومت، مساوی هم باشند. اکنون مشابه حالت قبل، می‌خواهیم نحوه تقسیم جریان بین دو مقاومت با رسانایی  $G_1$  و  $G_2$  را بیابیم. بدین منظور مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۲۳) را در نظر بگیرید. با توجه به موازی بودن مقاومت‌های با رسانایی  $G_1$  و  $G_2$  می‌توان نوشت:

$$v(t) = \frac{i_o(t)}{G_1 + G_2} \quad (۴۱-۲)$$





شکل (۲-۲۳): تقسیم جریان بین دو مقاومت

از طرف دیگر می‌دانیم که  $i_1(t) = G_1 \cdot v(t)$  خواهد بود که با جایگذاری در معادله اخیر خواهیم داشت:

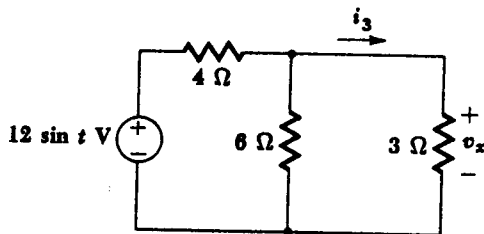
$$\frac{i_1(t)}{G_1} = \frac{i_0(t)}{G_1 + G_2}$$

$$\frac{i_1(t)}{i_0(t)} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (۲-۴۲)$$

به‌طور مشابه، سهم جریان  $i_2(t)$  از جریان  $i_0(t)$  را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{i_2(t)}{i_0(t)} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (۲-۴۳)$$

مثال (۲-۴): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۲۴) یک منبع ولتاژ به مقدار  $12 \sin t$  به سه مقاومت متصل شده است. در این مدار،  $i_3$  و  $v_x$  را بیابید.



شکل (۲-۲۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۲-۳)

حل: با توجه به آنکه مقاومت‌های  $3 \Omega$  و  $6 \Omega$  با هم موازی هستند لذا مقاومت معادل این دو برابر  $2 \Omega$  می‌شود. از طرف دیگر با توجه به آنکه ولتاژ  $v_x$  برای مقاومت  $3 \Omega$  و  $6 \Omega$  و معادل این دو یعنی  $2 \Omega$  یکسان می‌باشد، لذا با استفاده از تقسیم ولتاژ و رابطه (۲-۴۰) خواهیم داشت:

$$v_x(t) = \frac{2}{4+2} v_1(t) = \frac{1}{3} \times 12 \sin t = 4 \sin t \quad (\text{V})$$

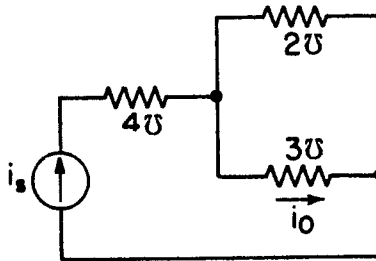
حال برای تعیین جریان  $i_3$ ، کافی است که ولتاژ  $v_x(t)$  را بر مقاومت  $3\Omega$  تقسیم کنیم. یعنی،

$$i_3(t) = \frac{v_x(t)}{3} = \frac{4 \sin t}{3} = \frac{4}{3} \sin t \quad (\text{A})$$

جریان عبوری از منبع ولتاژ را نیز می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$i(t) = \frac{12 \sin t}{4+2} = 2 \sin t \quad (\text{A})$$

تمرین (۳-۲): در شکل (۲-۲۵)، اگر منبع جریان به مقدار  $i_s(t) = 3 \cos 2t$  باشد، جریان  $i_o(t)$  را بیابید.



شکل (۲-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۲)

جواب:  $i_o(t) = \frac{9}{5} \cos 2t \quad (\text{A})$

## ۸-۲- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل با عناصر اساسی مدارهای الکتریکی از قبیل مقاومت و منابع ولتاژ و جریان آشنا شدیم. پس از آشنایی با این عناصر، به تحلیل ساده این نوع مدارها پرداختیم که خلاصه این مباحث را می‌توان به صورت موارد زیر بیان نمود:

- عناصر دوسر مورد بحث در این کتاب، دارای مشخصه‌ای در صفحه  $v-i$  هستند با توجه به خطی بودن این عناصر، این مشخصه از مبدا صفحه عبور کرده و به صورت خطوط مستقیم هستند. همچنین این مشخصه‌ها تغییرناپذیر با زمان می‌باشند.
- عنصر مقاومت خطی دارای مشخصه‌ای است که در صفحه  $v-i$  با یک خط عبوری از مرکز نشان داده می‌شود که شیب آن برابر مقاومت  $R$  است. لذا رابطه حاکم بر این عنصر  $v(t) = R \cdot i(t)$  خواهد بود.

- منابع الکتریکی به دو نوع منابع مستقل و وابسته تقسیم می‌شوند. منابع مستقل، مشخصه تولیدی آنان با زمان تغییر نمی‌یابد ولی مشخصه تولیدی منابع وابسته، با زمان تغییر می‌یابد.
- منابع الکتریکی مستقل به دو نوع ولتاژی و جریانی تقسیم می‌گردند. منبع مستقل ولتاژی دارای مشخصه‌ای به صورت یک خط راست موازی با محور جریان  $i$  می‌باشد. به عبارت دیگر، تحت هر جریان تولیدی توسط آن (که ناشی از میزان جریان دریافتی توسط بار است) مشخصه ولتاژ تولیدی آن همیشه ثابت خواهند ماند. منبع مستقل جریانی دارای مشخصه‌ای موازی با محور ولتاژ  $v$  می‌باشد.
- منابع الکتریکی وابسته به چهار نوع منابع ولتاژی و وابسته به جریان یا ولتاژ، و منابع جریانی وابسته به جریان یا ولتاژ می‌باشد.

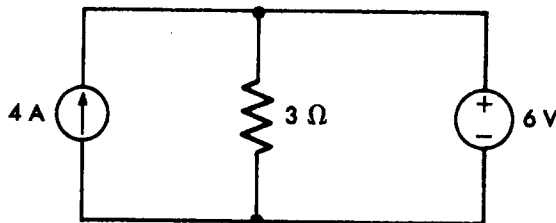
● با سری شدن عناصر مقاومت، مقاومت معادل از جمع تک تک مقاومت‌ها حاصل می‌شود.  $(R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i)$  همچنین اگر عناصر مقاومت به طور موازی بسته شوند، مقاومت معادل آنها دارای مقدار رسانایی است که از جمع تمام رسانایی مقاومت‌ها حاصل می‌گردد

$$(G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i)$$

● در صورتی که منابع ایده‌آل ولتاژی با هم به طور سری بسته شوند، منبع ولتاژ معادل، دارای ولتاژی برابر با جمع جبری تمام ولتاژ منابع خواهد بود. همچنین با موازی شدن منابع جریان، مقدار جریان معادل این منابع، از جمع جبری جریان تک‌تک منابع حاصل می‌شود.

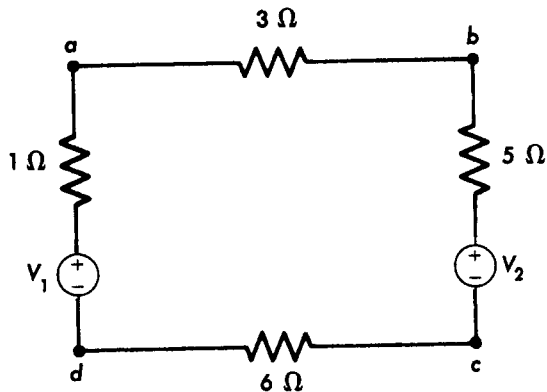
## ۹-۲- مسائل مروری

۱- شکل (۲-۲۶) مداری را نشان می‌دهد که در ارتباط با مفاهیم منابع ولتاژ و جریان است. در این مدار، توانی را که منبع ولتاژ تولید می‌کند، محاسبه کنید.



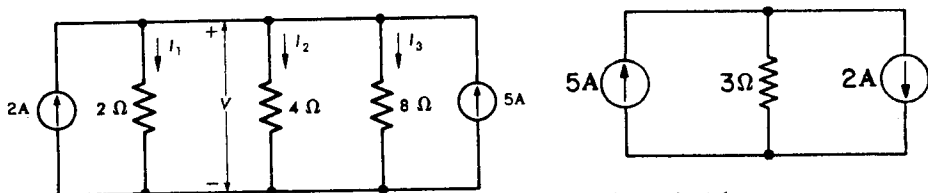
شکل (۲-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- یک مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۷-۲) مفروض می‌باشد. با استفاده از قانون KVL مقدار توان الکتریکی مصرفی روی هر مقاومت را بیابید.



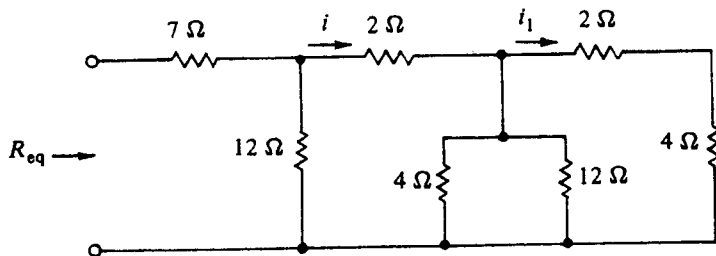
شکل (۲۷-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- شکل (۲۸-۲) دو مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. در هر یک از این مدارها، توان مصرفی هر مقاومت را با استفاده از قانون KCL بیابید.



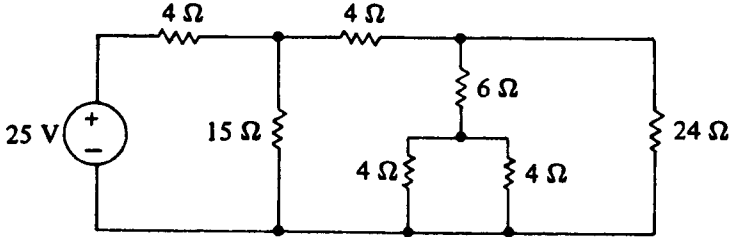
شکل (۲۸-۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۹-۲)، مقدار مقاومت معادل  $R_{eq}$  را بیابید. همچنین اگر  $i = 6A$  باشد مقدار  $i_1$  را بیابید.



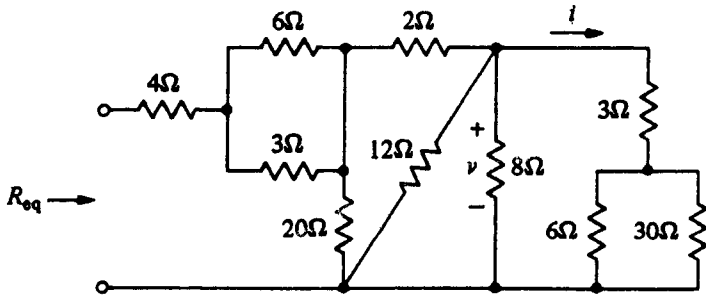
شکل (۲۹-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۰)، توان الکتریکی مصرفی در مقاومت  $15\Omega$  را بیابید.



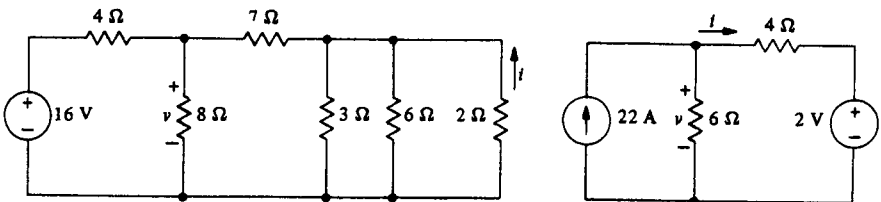
شکل (۲-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- در شکل (۲-۳۱) مدار الکتریکی نشان داده شده است. در این مدار،  $R_{eq}$  را بیابید. همچنین اگر یک منبع با ولتاژ ثابت  $50V$  به دو سر پایانه ورودی متصل شوند، ولتاژ  $v$  و جریان  $i$  مشخص شده در مدار را بیابید.



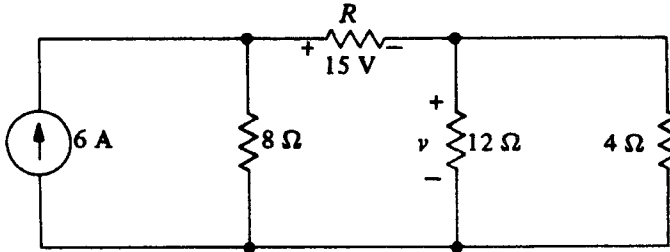
شکل (۲-۳۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

۷- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۲)، مقادیر ولتاژ و جریان  $v$  و  $i$  را بیابید.



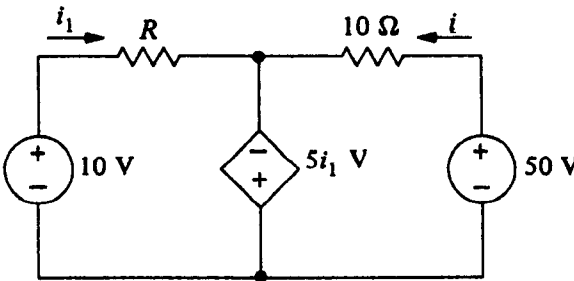
شکل (۲-۳۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- شکل (۲-۳۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که مقادیر  $R$  و  $v$  به‌عنوان مقادیر مجهول می‌باشند. این مقادیر را تعیین کنید.



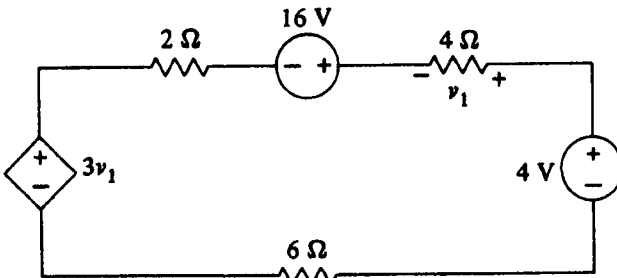
شکل (۲-۳۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۲-۳۴)، در صورتی‌که  $R = 10\Omega$  باشد، مقدارهای  $i$  و  $i_1$  را بیابید.



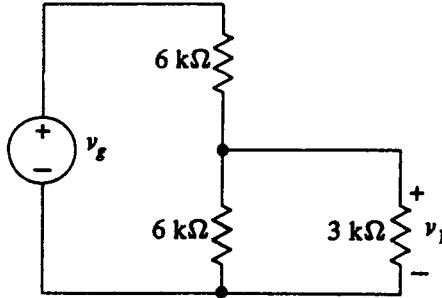
شکل (۲-۳۴): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۲-۳۵)، با تعیین جریان مدار، توان تلفاتی روی مقاومت  $6\Omega$  را بیابید.



شکل (۲-۳۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱- در شکل (۳۶-۲) که یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد، مقدار ولتاژ  $v_1$  را برحسب مقدار ولتاژ منبع  $v_g$  بیابید.



شکل (۳۶-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)