فصل یازدهم

سیستم‌های سه‌فاز متقارن

۱۱-۱- مقدمه

یکی از دلایل اساسی مطالعه حالت دائمی سینوسی مدارهای الکتریکی در فصل هفتم آن بود که بسیاری از مصارف خانگی و صنعتی از ولتاژ متناوب سینوسی استفاده می‌کردند. در آن فصل، به مفاهیم امواج متناوب سینوسی، پس‌فازی و پیش‌فازی موج، منابع ولتاژی و جریانی سینوسی، مفهوم امپدانس اهمی، سلفی و خازنی در سیستم‌های متناوب پی بردیم. سپس روش حل این‌گونه مدارها را با ابزار بسیار مفید فازور ارائه نمودیم. دیدیم که روش‌های حلی که برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان صادق بودند، در این نوع شبکه‌ها با استفاده از خاصیت فازور براحتی قابل پیاده سازی است.
اما با توجه به آنکه قسمت اعظم بارهای الکتریکی در سیستم‌های قدرت را موتورهای با توان بالا تشکیل می‌دهند، لذا هم به دلایل اقتصادی و هم به دلایل فنی، استفاده از سیستم‌های تغذیه تک‌فاز برای تغذیه موتورها و بارهای با قدرت بالا وجود ندارد. لذا مناسب است که از سیستم‌های دیگری موسوم به سیستم‌های تغذیه سه‌فاز استفاده گردد. بالطبع، برای تولید انرژی به‌صورت سیستم سه‌فاز نیز نیاز به ژنراتورهای (مولدهای) سه‌فاز به‌جای مولدها و منابع تک‌فاز می‌باشد. در حقیقت، این سیستم‌های سه‌فاز به‌عنوان وجه غالب انتقال انرژی الکتریکی در سیستم‌های قدرت به‌حساب می‌آید.
بدین منظور، در این فصل برآنیم تا با توجه به اهمیت سیستم‌های سه‌فاز، آنها را مورد بحث و بررسی قرار دهیم. لذا ابتدا منابع سه‌فاز و بارهای سه‌فاز را به‌همراه انواع آنان مورد تحلیل قرار داده و خصوصیات آنها را بیان می‌کنیم. سپس به تحلیل الکتریکی مدارهای سه‌فاز خواهیم پرداخت.

۱۱-۲- منابع سه‌فاز

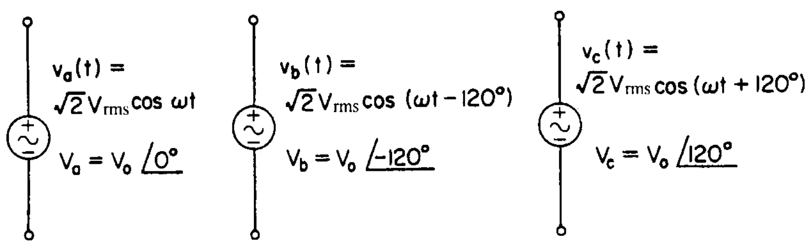
به منظور آنکه یک سیستم سه‌فاز الکتریکی را مورد بررسی قرار دهیم، ابتدا باید اجزاء آن را بیان نموده و خصوصیات آنها را تشریح کنیم. در هر سیستمی، ابتدا باید به تولید انرژی الکتریکی آن اشاره نمود، سپس نحوه انتقال انرژی و در نهایت، نحوه مصرف آن بررسی گردد. در نتیجه در سیستم‌های سه‌فاز نیز مبحث خود را از منابع سه‌فاز الکتریکی آغاز می‌کنیم.

همان‌گونه که از نام این منابع سه‌فاز مشخص است، آنها از سه منبع مجزا تشکیل شده اند که هر کدام، قادرند تا یک ولتاژ سینوسی متناوب را ایجاد کنند. در سیستم‌های قدرت، به این منابع، ژنراتورهای نیروگاهی می‌گویند. به‌عبارت دیگر، ژنراتورهای نیروگاهی دارای سه سیم‌پیچ مجزا بر روی استاتور[1] خود هستند که این سه سیم‌پیچ بر روی محیط دایره‌ای استاتور واقع می‌شوند. هر کدام از این سه سیم‌پیچ‌ها را می‌توان به‌عنوان یک منبع سینوسی مد نظر قرار داد و با توجه به آنکه این سیم‌پیچ‌ها از نظر الکتریکی، ۱۲۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند، لذا این سه منبع از نظر زاویه‌ای با هم ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند. همچنین به‌خاطر یکسان بودن مشخصات این سه سیم‌پیچ، نتیجه می‌گیریم که دامنه ولتاژ تولیدی توسط هر کدام از سیم‌پیچ‌ها با هم برابر خواهند بود. لذا این سه منبع که در شکل (۱۱-۱) نشان داده شده اند را می‌توان به‌وسیله رابطه‌های زیر مشخص نمود:

$$v_a(t) = \sqrt{۲}V_{rms}\cos\omega t \qquad (۱-۱۱)$$

$$v_b(t) = \sqrt{۲}V_{rms}(\cos\omega t - ۱۲۰) \qquad (۲-۱۱)$$

$$v_c(t) = \sqrt{۲}V_{rms}(\cos\omega t - ۲۴۰) \qquad (۳-۱۱)$$

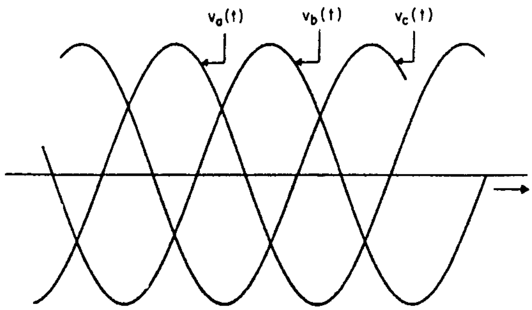


شکل (۱۱-۱): سه منبع سینوسی با اختلاف زاویه ۱۲۰ درجه

که در این روابط، ω سرعت زاویه‌ای منابع بر حسب rad/sec و V_{rms} ولتاژ مؤثر منابع بر حسب V می‌باشد. مشخص است که این سه ولتاژ با هم، ۱۲۰ درجه اختلاف دارند ولی

[1]- Stator

دامنه ولتاژ این سه منبع، با هم برابر و به‌مقدار $\sqrt{2}V_{rms}$ می‌باشد. شکل زمانی این سه ولتاژ را می‌توان در شکل (۱۱-۲) مشاهده نمود. در این شکل، مشخص است که در لحظه‌ای که یکی از ولتاژ منابع، صفر است، دو منبع دیگر دارای ولتاژی برابر نصف مقدار دامنه خود خواهند بود. همچنین هیچ لحظه‌ای وجود ندارد که کل توان لحظه‌ای تولید شده توسط سه منبع، به یک مقدار ثابتی باشد. لازم به‌ذکر است که به این سه منبع، منبع سه‌فاز متعادل می‌نامند. به‌عبارت دیگر، منابع سه‌فازی متعادل هستند که: الف) دامنه ولتاژ آنها یکسان باشد؛ ب) اختلاف فاز آنها برابر ۱۲۰ درجه باشد؛ ج) مجموع جبری ولتاژ سه‌فاز در هر لحظه صفر باشد..



شکل (۱۱-۲): شکل موج سه‌فاز سینوسی

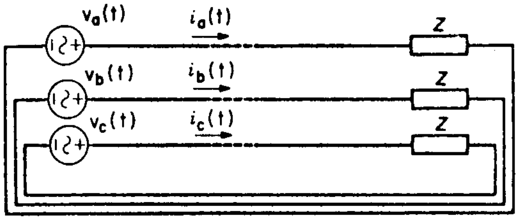
حال با استفاده از مفاهیم فازور ارائه‌شده در فصل هفتم، این سه ولتاژ سینوسی را می‌توان بر حسب فازورهای آنان به‌شکل زیر بیان نمود:

$$\vec{V}_a = V_{rms}\angle 0 \qquad (۱۱-۴)$$

$$\vec{V}_b = V_{rms}\angle -120 \qquad (۱۱-۵)$$

$$\vec{V}_c = V_{rms}\angle -240 = V_{rms}\angle 120 \qquad (۱۱-۶)$$

حال سؤالی که مطرح می‌شود آن است که انرژی این سه منبع چگونه منتقل می‌گردد؟ اگر انرژی هر کدام از این منابع بخواهد بر اساس شکل (۱۱-۳) به‌طور مستقل انتقال یابد به شش سیم نیاز می‌باشد که باعث افزایش هزینه خواهد بود. لذا سیستم سه‌فازی مطرح می‌شود که برای انتقال انرژی این سه منبع، فقط به سه سیم نیاز می‌باشد که هر سیم، به‌عنوان یک فاز در نظر گرفته می‌شود. پس برای آنکه یک منبع سه‌فاز ایجاد شود، شش سر مربوط به سه منبع ارائه‌شده در شکل (۱۱-۱) را چگونه می‌توان به سه‌فاز (یا سه سر) تبدیل نمود؟ برای این موضوع باید به اتصال منابع سه‌فاز به‌صورت اتصال ستاره و اتصال مثلث اشاره نمود.

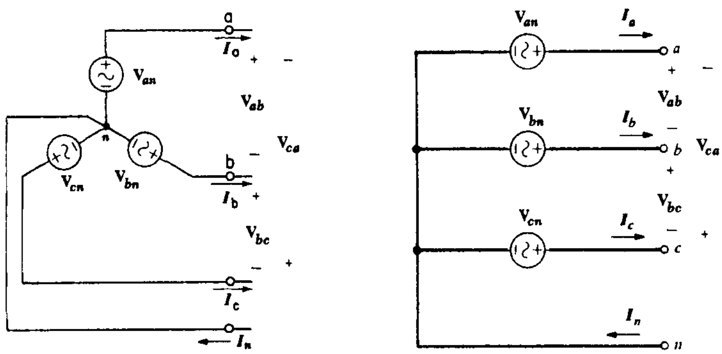


شکل (۱۱-۳): سیستم سه‌فاز با فازهای جداگانه

۱۱-۲-۱- اتصال ستاره منابع سه‌فاز

یکی از اتصالات سه منبع مجزا به یکدیگر، اتصال ستاره می‌باشد. در این حالت، سرهای منفی از سه منبع مجزا را به هم متصل کرده و سه سر دیگر را به‌عنوان سه سر خروجی از منابع بیرون می‌آوریم. این سه سر خروجی را فازهای a ، b ، و c می‌نامیم و سه سر دیگر را به‌عنوان مرکز ستاره و با n مشخص می‌کنیم. در نتیجه، ولتاژ سه منبع را به‌صورت $v_{an}(t)$ ، $v_{bn}(t)$ ، و $v_{cn}(t)$ نامیده و فازورهای آنان را به‌صورت $\vec{V}_{an}$ ، $\vec{V}_{bn}$ ، و $\vec{V}_{cn}$ نشان می‌دهیم. شکل اتصال ستاره منابع را می‌توان در(۱۱-۴) مشاهده نمود.

قبل از ادامه بحث در مورد اتصال ستاره، باید به مفاهیم متغیرهای فازی و خطی اشاره کنیم. همان‌گونه که از شکل (۱۱-۴) مشخص است، هر یک از منابع، دارای یک ولتاژ تولیدی و یک جریان عبوری از آن منبع است. به این ولتاژها و جریان‌ها که در ارتباط با هر کدام از منابع می‌باشند، به مشخصات فازی معروف هستند و با اندیس ph (به‌عنوان متغیر فازی[1]) نشان داده می‌شوند. مثلاً $\vec{V}_{an\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{V}_{bn\,\mathrm{ph}}$ ، و $\vec{V}_{cn\,\mathrm{ph}}$ به‌عنوان فازور



شکل (۱۱-۴): دو شکل نمایش از اتصال منابع سه‌فاز به‌صورت ستاره

[1]- Phase Variable

ولتاژهای فازی، و جریان‌های $\vec{I}_{a\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{I}_{b\,\mathrm{ph}}$ ، و $\vec{I}_{c\,\mathrm{ph}}$ به‌عنوان فازور جریان‌های فازی در نظر گرفته می‌شوند (در ادامه بحث و پس از مسلط شدن، دیگر از این زیرنویس‌ها هم استفاده نخواهیم کرد).

همچنین اگر معیار سنجش ولتاژ و جریان را در سرهای سه‌فاز a ، b و c خروجی از منبع سه‌فاز ستاره در نظر بگیریم، به متغیرهای جدیدی به‌نام متغیرهای خطی بر می‌خوریم. به‌عبارت دیگر، اگر فازور ولتاژ را بین سرهای a و b ، b و c ، و c و a در نظر بگیریم، به این ولتاژها، ولتاژهای خطی گفته می‌شود و با $\vec{V}_{ab\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{V}_{bc\,\mathrm{L}}$ ، و $\vec{V}_{ca\,\mathrm{L}}$ نشان می‌دهیم (زیرنویس L برای نشان دادن متغیر خطی[1] است). همچنین اگر جریان‌های خروجی از فازهای a ، b ، و c را در نظر بگیریم به آنان جریان‌های سه‌فاز خطی گفته می‌شود و با $\vec{I}_{a\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{I}_{b\,\mathrm{L}}$ ، و $\vec{I}_{c\,\mathrm{L}}$ نشان می‌دهیم.

حال می‌خواهیم ارتباط ولتاژها و جریان‌های خطی و فازی را با یکدیگر بیان کنیم. همان‌گونه از شکل (۱۱-۴) مشخص است، جریان‌های فازی و خطی در اتصال ستاره با هم برابر می‌باشند. یعنی:

$$\vec{I}_{a\,\mathrm{ph}} = \vec{I}_{a\,\mathrm{L}} \qquad (۷-۱۱)$$

$$\vec{I}_{b\,\mathrm{ph}} = \vec{I}_{b\,\mathrm{L}} \qquad (۸-۱۱)$$

$$\vec{I}_{c\,\mathrm{ph}} = \vec{I}_{c\,\mathrm{L}} \qquad (۹-۱۱)$$

اما برای محاسبه ولتاژهای خطی نسبت به ولتاژهای فازی از قانون KVL استفاده می‌شود. لذا بر اساس شکل (۱۱-۴) می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn} \qquad (۱۰-۱۱)$$

$$\vec{V}_{bc} = \vec{V}_{bn} - \vec{V}_{cn} \qquad (۱۲-۱۱)$$

$$\vec{V}_{ca} = \vec{V}_{cn} - \vec{V}_{an} \qquad (۱۳-۱۱)$$

با توجه به مشخص بودن ولتاژهای $\vec{V}_{an}$ ، $\vec{V}_{bn}$ ، و $\vec{V}_{cn}$ بر اساس روابط (۱۱-۴) تا (۱۱-۶)، ولتاژهای خطی رابطه‌های فوق را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

$$\vec{V}_{ab} = V_{rms}\angle o - V_{rms}\angle ۱۲۰ = \sqrt{۳}V_{rms}\angle ۳۰ \qquad (۱۳-۱۱)$$

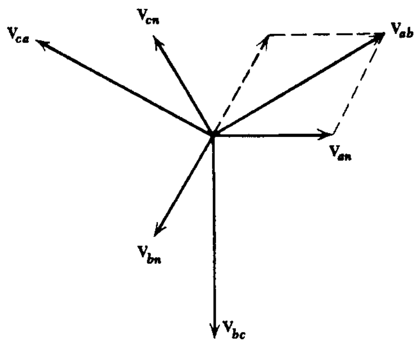
$$\vec{V}_{bc} = V_{rms}\angle -۱۲۰ - V_{rms}\angle -۲۴۰ = \sqrt{۳}V_{rms}\angle -۹۰ \qquad (۱۴-۱۱)$$

$$\vec{V}_{ca} = V_{rms}\angle -۲۴۰ - V_{rms}\angle o = \sqrt{۳}V_{rms}\angle ۱۵۰ \qquad (۱۵-۱۱)$$

به‌عبارت دیگر، می‌توان گفت که اندازه ولتاژهای خطی، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه ولتاژهای فازی است و زاویه ولتاژهای خطی، ۳۰ درجه جلوتر از زاویه ولتاژهای فازی است. این موضوع را می‌توان در بردار ولتاژهای فازی و خطی ارائه‌شده در شکل (۱۱-۵) مشاهده نمود.

---

[1]- Line Variable

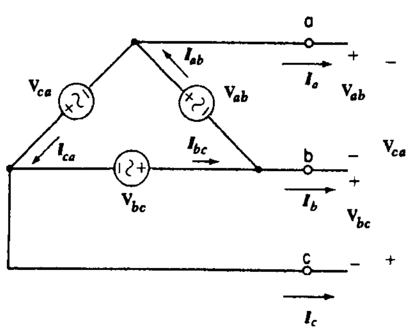


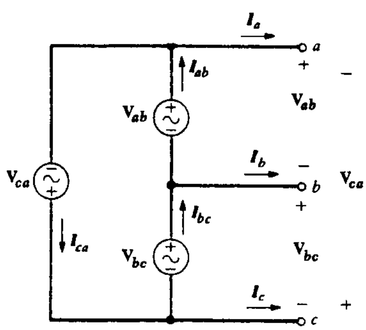
شکل (۱۱-۵): نمودار فازوری ولتاژهای خطی و فازی در اتصال ستاره

لازم به‌ذکر است که این سیستم سه‌فاز را، سیستم سه‌فاز با توالی abc می‌نامند؛ زیرا اختلاف زاویه فازهای a ، b ، و c به‌گونه‌ای است که ترتیب رسیدن هر یک از ولتاژ فازها به‌مقدار حداکثر خود، به‌ترتیب فازهای a ، b ، c ، a و ... می‌باشد. اینکه چگونه در عمل، چنین مجموعه‌ای از ولتاژها در ژنراتورهای نیروگاهی اتفاق می‌افتد، در ارتباط با جهت چرخش محور ژنراتورها و نامگذاری سیم‌پیچ‌ها می‌باشد.

۱۱-۲-۲- اتصال مثلث منابع سه‌فاز

نوع دیگری از اتصال سه منبع مجزا با یکدیگر، اتصال مثلث می‌باشد. در این حالت، سر و ته سه منبع، به‌طور متوالی به‌هم متصل شده و از نقاط اتصالی، سه انشعاب که فازهای خروجی a ، b ، و c را تشکیل می‌دهند، بیرون آورده می‌شود. نحوه این اتصال در شکل (۱۱-۶) نشان داده شده است.





شکل (۱۱-۶): دو شکل نمایش از اتصال منابع سه‌فاز به‌صورت مثلث

باز مشابه با حالت ستاره، متغیرهای فازی و خطی را برای ولتاژ و جریان مشخص می‌کنیم. متغیرهای فازی به‌صورت $\vec{V}_{ab\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{V}_{bc\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{V}_{ca\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{I}_{ab\,\mathrm{ph}}$ ، $\vec{I}_{bc\,\mathrm{ph}}$ ، و $\vec{I}_{ca\,\mathrm{ph}}$ می‌باشند که ولتاژهای با اندیس ph ، بیانگر ولتاژ دو سر منابع، و جریان‌های با اندیس ph ، معرف جریان تولیدی توسط سه منبع می‌باشند. از طرف دیگر، متغیرهای خطی که به‌صورت $\vec{V}_{ab\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{V}_{bc\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{V}_{ca\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{I}_{a\,\mathrm{L}}$ ، $\vec{I}_{b\,\mathrm{L}}$ ، و $\vec{I}_{c\,\mathrm{L}}$ می‌باشند بیانگر ولتاژهای دو سر فازهای (سرهای) خروجی و جریان‌های خارج شده از فازهای (سرهای) a ، b ، و c می‌باشند، همان‌گونه که از شکل (۱۱-۶) هم مشخص است، ولتاژ هر منبع با ولتاژ خطی آن برابر می‌باشد. به‌عبارت دیگر،

$$\vec{V}_{ab\,ph} = \vec{V}_{ab\,\mathrm{L}} \qquad (۱۱-۱۶)$$

$$\vec{V}_{bc\,ph} = \vec{V}_{bc\,\mathrm{L}} \qquad (۱۱-۱۷)$$

$$\vec{V}_{ca\,ph} = \vec{V}_{ca\,\mathrm{L}} \qquad (۱۱-۱۸)$$

حال اگر جریان‌های تولیدی هر منبع (جریان‌های فاز) را به‌صورت،

$$\vec{I}_{ab\,\mathrm{ph}} = I_{rms}\angle o \qquad (۱۱-۱۹)$$

$$\vec{I}_{bc\,\mathrm{ph}} = I_{rms}\angle -۱۲۰ \qquad (۱۱-۲۰)$$

$$\vec{I}_{ca\,\mathrm{ph}} = I_{rms}\angle -۲۴۰ \qquad (۱۱-۲۱)$$

در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از قانون KCL برای هر گره اتصال مثلث، جریان هر خط را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود (از اندیس ph و L صرف نظر می‌شود):

$$\vec{I}_a = \vec{I}_{ab} - \vec{I}_{ca} = I_{rms}\angle o - I_{rms}\angle -۲۴۰ = \sqrt{۳}I_{rms}\angle -۳۰ \qquad (۱۱-۲۲)$$

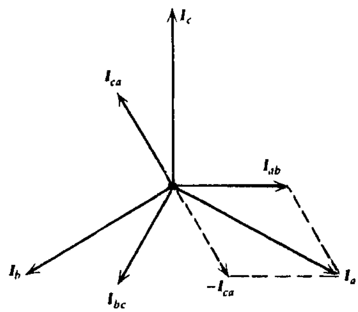
$$\vec{I}_b = \vec{I}_{bc} - \vec{I}_{ab} = I_{rms}\angle -۱۲۰ - I_{rms}\angle o = \sqrt{۳}I_{rms}\angle -۱۵۰ \qquad (۱۱-۲۳)$$

$$\vec{I}_c = \vec{I}_{ca} - \vec{I}_{bc} = I_{rms}\angle -۲۴۰ - I_{rms}\angle -۱۲۰ = \sqrt{۳}I_{rms}\angle ۹۰ \qquad (۱۱-۲۴)$$

همان‌گونه که از رابطه‌های (۱۱-۲۲) تا (۱۱-۲۴) مشخص است، اندازه جریان‌های خط، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه جریان‌های فازی می‌باشند و زاویه جریان‌های خط نیز، ۳۰ درجه عقب‌تر از زاویه جریان‌های فازی می‌باشند. این موضوع را می‌توان توسط نمودار برداری جریان‌های خطی و فازی نیز نشان داد که در شکل (۱۱-۷) مشخص شده است.

با روابط ارائه‌شده در این بخش، به این نتیجه می‌رسیم که می‌توان منابع سه‌فاز ستاره را به معادل مثلث آن تبدیل کرد و بر عکس. به‌عبارت دیگر، اگر دو منبع سه‌فاز، درون دو جعبه قرار گیرند و فقط سرهای (پایانه‌های) a ، b ، و c خارج شوند (و نقطه خنثی n مخفی نگه داشته شود) در این‌صورت به‌هیچ وجه نمی‌توان با اندازه‌گیری الکتریکی، اتصالات ستاره و مثلث را از هم متمایز نمود. شرط معادل بودن، آن است که ولتاژهای خط باید از نظر دامنه و فاز در هر دو حالت اتصال ستاره و یا مثلث یکسان باشند. با توجه

به این موضوع، بدون آنکه عمومیت بحث را از دست دهیم، معمولاً بر روی اتصال ستاره با توالی abc تأکید می‌گردد؛ مگر آنکه کلمه مثلث در اتصال منبع ذکر گردد.



شکل (۱۱-۷): نمودار فازوری جریان‌های خطی و فازی در اتصال مثلث

مثال (۱۱-۱): در یک منبع سه‌فاز ستاره، اگر توالی فاز به‌صورت abc باشد، و $\vec{V}_{bn} = ۱۲۰\angle o$V باشد، مطلوب محاسبه $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ ، و $\vec{V}_{ca}$.

حل: با توجه به توالی فاز abc ، در می‌یابیم که $\vec{V}_{an}$ ، ۱۲۰ درجه از $\vec{V}_{bn}$ جلوتر، و $\vec{V}_{cn}$ ، ۱۲۰ درجه از $\vec{V}_{bn}$ ، عقب‌تر است. لذا،

$$\vec{V}_{an} = ۱۲۰\angle + ۱۲۰$$
$$\vec{V}_{bn} = ۱۲۰\angle o$$
$$\vec{V}_{cn} = ۱۲۰\angle - ۱۲۰$$

حال می‌توان ولتاژهای خطی را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn} = \sqrt{۳} \times ۱۲۰\angle ۱۵۰$$
$$\vec{V}_{bc} = \vec{V}_{bn} - \vec{V}_{cn} = \sqrt{۳} \times ۱۲۰\angle ۳۰$$
$$\vec{V}_{ca} = \vec{V}_{cn} - \vec{V}_{an} = \sqrt{۳} \times ۱۲۰\angle - ۹۰$$

تمرین (۱۱-۱): در یک منبع سه‌فاز مثلث، اگر توالی فازها به‌صورت abc باشد و $\vec{V}_{ab} = ۱۷۳۳\angle o$V گردد، آنگاه مقادیر $\vec{V}_{an}$ ، $\vec{V}_{bn}$ ، و $\vec{V}_{cn}$ را بیابید.

جواب: $\vec{V}_{an} = \frac{۱۷۳۳}{\sqrt{۳}}\angle ۳۰$ ، $\vec{V}_{bn} = \frac{۱۷۳۳}{\sqrt{۳}}\angle ۱۵۰$ ، $\vec{V}_{an} = \frac{۱۷۳۳}{\sqrt{۳}}\angle ۲۷۰$

۱۱-۳- بارهای سه‌فاز متعادل

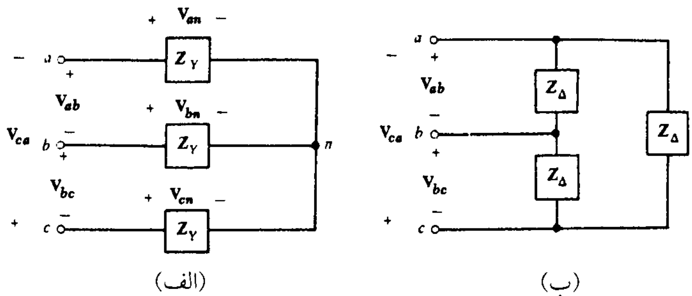
مشابه آنچه که برای منابع سه‌فاز بیان نمودیم، بارهای سه‌فاز می‌توانند به‌صورت اتصال ستاره و یا مثلث به منابع متصل شوند. این دو اتصال در شکل (۱۱-۸) نشان داده شده

است. در این بارهای سه‌فاز فرض می‌شود که امپدانس هر یک از سه‌فاز بار مصرفی با یکدیگر مساوی است. لذا منظور از متعادل بودن بار در اتصال ستاره به این معنی است که،

$$\vec{Z}_{an} = \vec{Z}_{bn} = \vec{Z}_{cn} = \vec{Z}_Y \quad (۱۱-۲۵)$$

همچنین در اتصال مثلث، شرط متعادل بودن بار مصرفی ایجاب می‌کند که،

$$\vec{Z}_{ab} = \vec{Z}_{bc} = \vec{Z}_{ca} = \vec{Z}_\Delta \quad (۱۱-۲۶)$$



شکل (۱۱-۸): بار سه‌فاز متعادل: الف) اتصال ستاره؛ ب) اتصال مثلث

در اتصال ستاره، اگر ولتاژ سه‌فاز اتصالی به بار، به‌صورت متعادل باشند، آنگاه با توجه به مساوی بودن امپدانس سه‌فاز می‌توان نتیجه گرفت که جریان‌های سه‌فاز خط در اتصال ستاره به‌صورت متعادل می‌باشد و بالطبع،

$$\vec{I}_n = \vec{I}_a + \vec{I}_b + \vec{I}_c = o \quad (۱۱-۲۷)$$

لذا نیازی به اتصال سیم خنثی به نقطه n بار وجود ندارد.

خصوصیات متغیرهای فازی و خطی در اتصال ستاره و مثلث بارها، دقیقاً مشابه منابع سه‌فاز می‌باشد. این موضوع به این معنی است که در اتصال ستاره بارهای سه‌فاز، جریان‌های خط و فاز با هم برابر می‌باشند ولی اندازه ولتاژهای خط، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه ولتاژهای فازی (ولتاژ دو سر هرامپدانس $\vec{Z}_Y$) خواهد بود و زاویه ولتاژهای خط به‌اندازه ۳۰ درجه از زاویه ولتاژهای متناظر فازی، جلوتر است. همچنین در اتصال مثلث بارهای سه‌فاز، ولتاژهای فازی با خطی برابر می‌باشند ولی اندازه جریان‌های خط، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه جریان‌های فاز (جریان‌های عبوری از هر امپدانس $\vec{Z}_\Delta$) بوده و زاویه جریان‌های خط، به اندازه ۳۰ درجه از زاویه جریان‌های متناظر فازی، عقب‌تر است.

حال مشابه موضوعی که برای تبدیل منابع سه‌فاز ستاره و مثلث بیان نمودیم، در بارهای سه‌فاز هم می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان اتصال ستاره را با اتصال مثلث، معادل سازی نمود؟ برای پاسخ به این سؤال باید گفت با توجه به آنکه ولتاژ دو سر امپدانس

مثلث، $\sqrt{۳}$ برابر ولتاژ دوسر امپدانس ستاره است و با در نظر گرفتن اینکه جریان عبوری از امپدانس اتصال ستاره، $\sqrt{۳}$ برابر جریان گذرنده از امپدانس اتصال مثلث است، لذا به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که برای معادل سازی بارهای ستاره و مثلث، باید شرط زیر بر قرار باشد:

$$\vec{Z}_{\Delta} = ۳\vec{Z}_{Y} \qquad (۲۸-۱۱)$$

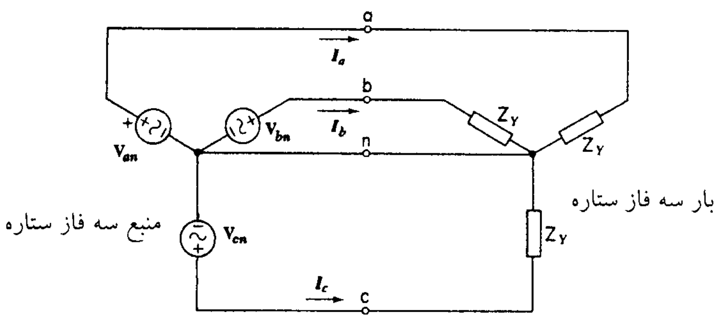
به عبارت دیگر،

$$\left|\vec{Z}_{\Delta}\right| = ۳\left|\vec{Z}_{Y}\right| \qquad (۲۹-۱۱)$$

$$\angle\vec{Z}_{\Delta} = \angle\vec{Z}_{Y} \qquad (۳۰-۱۱)$$

لازم به‌ذکر است که معادل بودن دو اتصال ستاره و مثلث، به مفهوم آن است که در پایانه‌های a ، b ، و c هیچ‌گونه اندازه‌گیری الکتریکی جهت تمایز این دو اتصال نمی‌توان انجام داد.

مثال (۱۱-۲): یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره که امپدانس هر شاخه آن برابر $\vec{Z}_{Y} = ۸۰ + j۳۰\Omega$ می‌باشد، به یک منبع سه‌فاز با اتصال ستاره که مقدار موثر ولتاژ هر فاز آن برابر ۷۹/۶۷kV است، متصل شده است. این مدار را می‌توان در شکل (۱۱-۹) مشاهده نمود. الف) فازور جریان‌های سه‌فاز بار را پیدا کنید. ب) ولتاژهای خطی مربوط به بار را بیابید. ج) اگر بار موردنظر با همان امپدانس، با اتصال مثلث باشد، جریان‌های شاخه‌های بار را بیابید.



شکل (۱۱-۹): مدار سه‌فاز مربوط به مثال (۱۱-۲)

حل: الف) با توجه به‌مقدار موثر ولتاژ منابع سه‌فاز، فازور ولتاژ منبع سه‌فاز را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\vec{V}_{an} = ۷۹/۶۷\angle o \ \text{kV}$$
$$\vec{V}_{bn} = ۷۹/۶۷\angle -۱۲۰^{o} \ \text{kV}$$

$$\vec{V}_{cn} = ۷۹/۶۷\angle -۲۴۰^{o} \quad \text{kV}$$

در نتیجه، جریان‌های هر فاز بار، برابر است با:

$$\vec{I}_a = \frac{\vec{V}_{an}}{\vec{Z}_Y} = \frac{۷۹/۶۷\angle o^{0}}{۸۰ + j۳۰} = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_b = \frac{\vec{V}_{bn}}{\vec{Z}_Y} = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶ - ۱۲۰ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_c = \frac{\vec{V}_{cn}}{\vec{Z}_Y} = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶ - ۲۴۰ \quad \text{kA}$$

لازم به‌ذکر است که چون اتصال بار، به‌طور ستاره می‌باشد، لذا جریان‌های خط و فاز بار، با هم برابر می‌باشند.

ب) برای تعیین ولتاژهای خطی سه‌فاز بار، می‌دانیم که سه‌فاز بار با سه‌فاز منبع، موازی می‌باشند. لذا ولتاژهای خطی بار با ولتاژهای خطی منبع، برابر هستند. یعنی،

$$\vec{V}_{ab} = \sqrt{۳}\vec{V}_{an}\angle ۳۰ = \sqrt{۳} \times ۷۹/۶۷\angle ۳۰ = ۱۳۸\angle ۳۰^{o} \quad \text{kV}$$

$$\vec{V}_{bc} = ۱۳۸\angle -۹۰^{o} \quad \text{kV}$$

$$\vec{V}_{ca} = ۱۳۸\angle -۲۱۰^{o} \quad \text{kV}$$

ج) با توجه به آنکه در اتصال مثلث، ولتاژهای خطی در دو سر هر فاز، در دو سر هر شاخه مثلث قرار می‌گیرد و با در نظر گرفتن این نکته که همان امپدانس $۸۰ + j۳۰\ \Omega$ برای شاخه‌های مثلث نیز در نظر گرفته شده است، لذا خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{ab} = \frac{\vec{V}_{ab}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{۱۳۸\angle ۳۰^{o} kV}{۸۰ + j۳۰} = ۱/۶۱۵\angle ۹/۴۴ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_{bc} = \frac{\vec{V}_{bc}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{۱۳۸\angle -۹۰^{o} kV}{۸۰ + j۳۰} = ۱/۶۱۵\angle ۹/۴۴ - ۱۲۰ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_{ca} = \frac{\vec{V}_{ca}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{۱۳۸\angle -۲۱۰^{o} kV}{۸۰ + j۳۰} = ۱/۶۱۵\angle ۹/۴۴ - ۲۴۰ \quad \text{kA}$$

تمرین (۱۱-۲): یک سیستم سه‌فاز متعادل با ولتاژ فازی $\vec{V}_{an} = ۲۴۰\angle -۹۰\text{V}$ به‌صورت ستاره متصل شده است. سرعت زاویه‌ای این منبع سه‌فاز برابر $\omega = ۵۰۰\ \text{rad/sec}$ است. حال این منبع به یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره متصل شده است که در هر فاز، یک خازن با ظرفیت $۵۰\ \mu\text{F}$ با یک مقاومت $۵۰\ \Omega$ سری شده و معادل این دو، با یک سلف $۵۰\ \text{mH}$ موازی شده است. در این مدار مطلوب است: الف) $\vec{V}_{bn}$ ، ب) $\vec{V}_{bc}$ ، ج) $\vec{I}_a$

جواب: الف) $۲۴۰\angle ۱۵۰^{o}$ **؛ ب)** $۴۱۶\angle ۱۸۰^{o}$ **؛ ج)** $۵/۶\angle -۴۳/۳^{o}$

۱۱-۴- توان در سیستم‌های سه‌فاز

در فصل هفتم، پس از تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای تک‌فاز، توان در این سیستم‌ها را بیان نمودیم. در آنجا، فازور توان ظاهری در سیستم‌های تک‌فاز را به‌صورت حاصل ضرب فازور ولتاژ در مزدوج فازور جریان بیان نمودیم. یعنی،

$$\vec{S} = \vec{V}\vec{I}^* \tag{۱۱-۳۱}$$

حال اگر $\vec{V} = V_{rms}\angle\alpha$ و $\vec{I} = I_{rms}\angle\beta$ در نظر بگیریم آنگاه رابطه (۱۱-۳۱) به‌شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\vec{S} = V_{rms}\angle\alpha(I_{rms}\angle\beta)^* = V_{rms}I_{rms}\angle\alpha-\beta$$

حال اگر توان ظاهری رابطه اخیر را از صورت قطبی به‌صورت دکارتی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\vec{S} = V_{rms}I_{rms}\cos\phi + jV_{rms}I_{rms}\sin\phi \tag{۱۱-۳۲}$$

که $\phi = \alpha - \beta$ می‌باشد. سپس در فصل هفتم، مفهوم توان حقیقی (اکتیو) و موهومی (راکتیو) را به‌شکل زیر تعریف نمودیم:

$$P = V_{rms}I_{rms}\cos\phi \tag{۱۱-۳۳}$$

$$Q = V_{rms}I_{rms}\sin\phi \tag{۱۱-۳۴}$$

حال می‌خواهیم همین روابط را برای سیستم‌های سه‌فاز متعادل و در دو حالت اتصال ستاره و اتصال مثلث بیان کنیم. با توجه به آنکه در اتصال ستاره، فرض بر آن بود که سیستم، به‌صورت متعادل است (یعنی امپدانس‌های سه‌فاز با هم برابرند) لذا توان ظاهری در هر سه‌فاز با هم برابرند. یعنی،

$$\vec{S}_{an} = \vec{S}_{bn} = \vec{S}_{cn} = \vec{S}_{1ph} \tag{۱۱-۳۵}$$

که زیر نویس ۱ph به‌معنای تک فاز می‌باشد. همچنین در اتصال مثلث بارهای متعادل می‌توان نوشت:

$$\vec{S}_{ab} = \vec{S}_{bc} = \vec{S}_{ca} = \vec{S}_{1ph} \tag{۱۱-۳۶}$$

اما در بارهای سه‌فاز با هر دو اتصال ستاره و مثلث، می‌توان گفت که توان سیستم سه‌فاز، از مجموع توان تک تک فازها محاسبه می‌شود و چون توان‌های هر سه‌فاز با هم برابر هستند، لذا:

$$\vec{S}_{3ph} = 3\vec{S}_{1ph}$$

اما می‌دانیم که توان تک‌فاز بر اساس رابطه (۱۱-۳۱) محاسبه می‌شود. لذا،

$$\vec{S}_{3ph} = 3V_{1ph}I_{1ph}\angle\phi \tag{۱۱-۳۷}$$

که در این رابطه، زیرنویس ۳ph به‌معنای سیستم سه‌فاز می‌باشد. همچنین $V_{\text{۱}ph}$ معّرف ولتاژ مؤثر دو سر عناصر هر شاخه و $I_{\text{۱}ph}$ معّرف جریان مؤثر عبوری از عناصر هر شاخه می‌باشد. این روابط، هم برای اتصال ستاره و هم برای اتصال مثلث صادق می‌باشد.

حال می‌خواهیم رابطه (۱۱-۳۷) را برای اتصال‌های ستاره و مثلث به‌طور جداگانه بیان کنیم. در بخش قبلی بیان کردیم که در اتصال ستاره، اندازه جریان خط، با جریان فاز، برابر است (یعنی $I_L = I_{\text{۱}ph}$) ولی اندازه ولتاژ خط، $\sqrt{\text{۳}}$ برابر اندازه ولتاژ فاز است (یعنی $V_L = \sqrt{\text{۳}} V_{\text{۱}ph}$). پس رابطه (۱۱-۳۷) بر حسب متغیرهای خطی به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = \text{۳}\frac{V_L}{\sqrt{\text{۳}}} I_L \angle\phi$$

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \angle\phi \qquad (\text{۱۱-۳۸})$$

که در این رابطه، V_L اندازه ولتاژ مؤثر بین فازهای a ، b ، و c ، و I_L هم اندازه جریان مؤثر عبوری از سرهای فازهای a ، b ، و c می‌باشد.

به طور مشابه، برای بارهای مثلث بیان نمودیم که اندازه ولتاژهای خطی و فازی با هم برابرند ولی اندازه جریان خط، $\sqrt{\text{۳}}$ برابر اندازه جریان فازی است. لذا رابطه (۱۱-۳۷) را می‌توان به‌شکل زیر تغییر داد:

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = \text{۳} V_L \frac{I_L}{\sqrt{\text{۳}}} \angle\phi$$

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \angle\phi \qquad (\text{۱۱-۳۹})$$

پس با مقایسه روابط (۱۱-۳۸) و (۱۱-۳۹) برای بارهای سه‌فاز با اتصال ستاره و مثلث در می‌یابیم که شکل روابط برای محاسبه توان در هر دو اتصال، مشابه یکدیگر می‌باشد. با تبدیل این دو رابطه از شکل قطبی به‌شکل دکارتی خواهیم داشت:

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \cos\phi + j\sqrt{\text{۳}} V_L I_L \sin\phi \qquad (\text{۱۱-۴۰})$$

در نتیجه، توان حقیقی و موهومی بارهای سه‌فاز را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$P_{\text{۳}ph} = \text{۳} P_{\text{۱}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \cos\phi \quad \text{W} \qquad (\text{۱۱-۴۱})$$

$$Q_{\text{۳}ph} = \text{۳} Q_{\text{۱}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \sin\phi \quad \text{VAR} \qquad (\text{۱۱-۴۲})$$

باز هم یادآوری کنیم که روابط (۱۱-۳۸) تا (۱۱-۴۲) صرفنظر از نوع اتصال بار می‌باشد و فقط با متغیرهای خط در بارهای سه‌فاز مرتبط می‌باشد. لازم به‌ذکر است که واحد توان حقیقی را با وات (W)، واحد توان موهومی را با ولت آمپر راکیتو (VAR) و واحد توان ظاهری را با ولت آمپر (VA) بیان نمودیم. پس با توجه به آنکه توان ظاهری سه‌فاز برابر

$$S_{\text{۳}ph} = \sqrt{\text{۳}} V_L I_L \qquad (\text{۱۱-۴۳})$$

است، لذا توان حقیقی و موهومی سه‌فاز را می‌توان به‌صورت‌های زیر نیز بیان نمود:

$$P_{۳ph} = S_{۳ph}\cos\phi \qquad (۴۴-۱۱)$$

$$Q_{۳ph} = S_{۳ph}\sin\phi \qquad (۴۵-۱۱)$$

مثال (۱۱-۳): در مثال (۱۱-۲) در حالتی که اتصال بار به‌صورت ستاره باشد، توان‌های ظاهری، حقیقی و موهومی هر فاز و سه‌فاز را بیابید.

حل: در آن مثال، جریان‌های هر فاز بار به‌صورت زیر محاسبه نمودیم:

$$\vec{I}_a = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_b = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶-۱۲۰ \quad \text{kA}$$

$$\vec{I}_c = ۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶-۲۴۰ \quad \text{kA}$$

حال با توجه به اینکه، ولتاژ فازی $\vec{V}_{an} = ۷۹/۶\angle o\text{kV}$ می‌باشد، لذا توان ظاهری بار هر فاز برابر است با:

$$\vec{S}_{۱ph} = \vec{V}_{۱ph}\cdot\vec{I}_{۱ph}^{*}$$

$$= (۷۹/۶۷\angle ۰)(۰/۹۳۲\angle -۲۰/۵۶)^{*} = ۷۴/۲۵\angle ۲۰/۵۶ \quad \text{MVA}$$

برای به‌دست آوردن توان حقیقی و موهومی هر فاز، فازور $\vec{S}_{۱ph}$ را به‌صورت دکارتی می‌نویسیم:

$$\vec{S}_{۱ph} = ۷۴/۲۵\angle ۲۰/۵۶ \quad \text{kVA} = ۷۴/۲۵\cos(۲۰/۵۶) + j۷۴/۲۵\sin(۲۰/۵۶) =$$

$$= ۶۹/۵ + j۲۶/۱$$

لذا در می‌یابیم که،

$$P_{۱ph} = ۶۹/۵ \quad \text{MW/phase}$$

$$Q_{۱ph} = ۲۶/۱ \quad \text{MVAR/phase}$$

لازم به‌ذکر است که این توان‌های حقیقی و موهومی را می‌توان از روابط مستقیم آنها نیز محاسبه نمود. با توجه آنکه $\phi = ۲۰/۵۶^{o}$ می‌باشد لذا،

$$P_{۱ph} = V_{۱ph}I_{۱ph}\cos\phi = ۷۹/۶۷\times ۰/۹۳۲\times\cos ۲۰/۵۶ = ۶۹/۵ \quad \text{MW/phase}$$

$$Q_{۱ph} = V_{۱ph}I_{۱ph}\sin\phi = ۷۹/۶۷\times ۰/۹۳۲\times\sin ۲۰/۵۶ = ۲۶/۱ \quad \text{MVAR/phase}$$

حال توان سه‌فاز اکیتو و راکیتو و ظاهری را می‌توان از سه برابر کردن هر کدام آنها به‌دست آورد.

$$S_{۳ph} = ۳\times ۷۴/۲۵ = ۲۲۲/۸ \quad \text{MVA/۳phase}$$

$$P_{۳ph} = ۳\times ۶۹/۵ = ۲۰۸/۵ \quad \text{MW/۳phase}$$

$$Q_{۳ph} = ۳\times ۲۶/۱ = ۷۸/۳ \quad \text{MVAR/۳phase}$$

هر کدام از توان‌های سه‌فاز را می‌توان به‌طور مستقیم نیز به‌دست آورد. یعنی،

$$S_{۳ph} = \sqrt{۳}V_L I_L = \sqrt{۳} \times ۱۳۸ \times ۰/۹۳۲ = ۲۲۲/۸ \quad \text{MVA/۳phase}$$

$$P_{۳ph} = \sqrt{۳}V_L I_L \cos\phi = \sqrt{۳} \times ۱۳۸ \times ۰/۹۳۲ \times \cos ۲۰/۵۶ = ۲۰۸/۵ \quad \text{MW/۳phase}$$

$$Q_{۳ph} = \sqrt{۳}V_L I_L \sin\phi = \sqrt{۳} \times ۱۳۸ \times ۰/۹۳۲ \times \sin ۲۰/۵۶ = ۷۸/۳ \quad \text{MVAR/۳phase}$$

لازم به‌ذکر است که اعداد روابط اخیر، با توجه به این نکته بیان شده‌اند که اتصال بار به‌صورت اتصال ستاره است و با توجه به مساوی بودن جریان خط و فاز، و $\sqrt{۳}$ برابر بودن ولتاژ خط نسبت به ولتاژ فاز می‌باشد که این اعداد در مثال (۱۱-۲) محاسبه شده بودند.

مثال (۱۱-۴): یک بار سه‌فاز تحت ولتاژ ۲۴۰۰V (ولتاژ خطی)، توان سه‌فازی به‌مقدار ۱۰۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز دریافت می‌کند. الف) اگر این بار به‌صورت ستاره باشد، امپدانس سه‌فاز را به‌دست آورید؟ ب) اگر بار به‌صورت اتصال مثلث باشد، امپدانس هر فاز چقدر است ؟

حل: الف) در ابتدا باید اندازه جریان خط را به‌دست آوریم. با توجه به واحد توان سه‌فاز ارائه شده، در می‌یابیم که توان ظاهری سه‌فاز داده شده است. لذا،

$$S_{۳ph} = \sqrt{۳}V_L I_L$$

$$I_L = \frac{۱۰۰\text{kVA}}{\sqrt{۳} \times ۲۴۰۰} = ۲۴/۰۶ \quad \text{A}$$

با توجه به اینکه $\cos\phi = ۰/۸$ پس‌فاز است در نتیجه، فازور جریان خط برابر است با:

$$\vec{I}_L = ۲۴/۰۶\angle -\cos^{-۱} ۰/۸ = ۲۴/۰۶\angle -۳۶/۸۷ \quad \text{A}$$

حال با توجه به تساوی جریان خط و فاز، و ولتاژ $\vec{V}_{an} = {}^{۲۴۰۰}\!/_{\sqrt{۳}}\angle o$ ، امپدانس هر فاز ستاره برابر است با:

$$\vec{Z}_Y = \frac{\vec{V}_{an}}{\vec{I}_{۱ph}} = \frac{۱۳۸۵/۶۴\angle ۰}{۲۴/۰۶\angle -۳۶/۸۷} = ۵۷/۵۹\angle ۳۶/۸۷ \ \Omega$$

ب) در صورتی‌که اتصال به‌صورت مثلث باشد، جریان خط به‌همان مقدار $\vec{I}_L = ۲۴/۰۶\angle -۳۶/۷۸$ می‌باشد. لذا برای محاسبه جریان فاز، باید اندازه آن، ${}^{۱}\!/_{\sqrt{۳}}$ برابر گردد و زاویه آن هم، ۳۰ درجه بیشتر شود؛ یعنی $\vec{I}_{ph} = ۱۳/۸۹ \angle -۶/۷۸$ می‌گردد. حال ولتاژ خط بین دو فاز a و b برابر $\vec{V}_{ab} = ۲۴۰۰\angle ۳۰ \ \text{V}$ است. زاویه ۳۰ درجه برای ولتاژ مذکور به آن دلیل است که زاویه ولتاژ فازی را برابر صفر درجه در نظر گرفته‌ایم. در نتیجه خواهیم داشت.

$$\vec{Z}_{\Delta}=\frac{\vec{V}_{ab}}{\vec{I}_{ph}}=\frac{۲۴۰۰\angle ۳۰}{۱۳/۸۹\angle -۶/۸۷}=۱۷۲/۷۸۶\angle +۳۶/۸۷\ \Omega$$

از مقایسه بین امپدانس $\vec{Z}_Y$ و $\vec{Z}_{\Delta}$ نتیجه می‌گیریم که زاویای این دو امپدانس، با هم برابرند، ولی اندازه امپدانس مثلث، ۳ برابر امپدانس ستاره است. یعنی:

$$\vec{Z}_{\Delta}=۱۷۲/۷۸۶=۳\times ۵۷/۵۹=۳\times \vec{Z}_Y$$

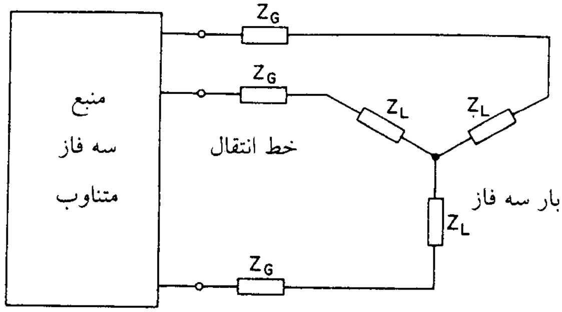
تمرین (۱۱-۳): یک بار سه‌فاز تحت ولتاژ خطی ۲۴۰۰V ، توان ۵۰۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز دریافت می‌کند. مطلوبست محاسبه: الف) ولتاژ خط $\vec{V}_L$ ؛ ب) جریان خط $\vec{I}_L$ ؛ ج) توان حقیقی، موهومی و ظاهری سه‌فاز ($P_{۳ph}$ ، $Q_{۳ph}$ ، $S_{۳ph}$)

جواب: الف) $\vec{V}_L=۲۴۰۰\angle o$ ؛ ب) $\vec{I}_L=۱۲۰/۲۸\angle -۳۶/۸۷$ ؛
ج) $P_{۳ph}=۴۰۰\text{kW}$ ، $Q_{۳ph}=۳۰۰\text{kVAR}$ ، $S_{۳ph}=۵۰۰\text{kVA}$

۱۱-۵- تحلیل مدارهای سه‌فاز متعادل

با توجه به آنکه در مدارهای سه‌فاز موردنظر، سیستم به‌صورت متقارن می‌باشد (به‌عبارت دیگر، امپدانس عناصر هر سه‌فاز اعم از منابع، خطوط و بارها با هم مساوی می‌باشند)، لذا می‌توان نتیجه گرفت که تمام متغیرهای شبکه به‌صورت متعادل می‌باشند؛ یعنی اندازه‌های متغیرهای سه‌فاز با هم برابر بوده ولی زاویه‌های آنان با یکدیگر ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند. لذا در این حالت، استفاده از تحلیل تک فاز، بررسی سیستم را تا حد بسیار زیادی ساده خواهد کرد. این نوع تحلیل را به‌طور مفصل در فصل هفتم بیان نموده‌ایم. فقط نکته‌ای که باقی می‌ماند آن است که اگر اتصال بارها و منابع سه فاز، به‌صورت اتصال مثلث باشند برای سادگی کار، بهتر است که آنان را با اتصال ستاره معادل‌سازی کنیم تا مرکز ستاره (سیم خنثی) برای این وسایل ایجاد شود. با اتصال مراکز ستاره کلیه وسایل سه فاز، می‌توان از تحلیل تک فاز استفاده نمود.

مثال (۱۱-۵): یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره و امپدانس‌های هر فاز $\vec{Z}_L=۴+j۳\Omega$ از طریق یک خط با امپدانس هر فاز $\vec{Z}_G=۰/۱+j۰/۱\Omega$ به یک منبع سه‌فاز با اتصال ستاره و ولتاژ خط ۱۲۰V مؤثر متصل شده است. نحوه اتصال این مدار را می‌توان در شکل (۱۱-۱۰) مشاهده نمود. در این مدار، مطلوبست: الف) جریان‌های سه‌فاز بار؛ ب) ولتاژهای سه‌فاز بار؛ ج) ولتاژ خطی در دو سر بار.



شکل (۱۱-۱۰): شبکه سه‌فاز مربوط به مثال (۱۱-۵)

حل: با توجه به آنکه ولتاژهای خط در دو سر منبع، ۱۲۰V می‌باشد، لذا ولتاژهای فازی منبع برابرند با:

$$\vec{V}_{an} = \frac{۱۲۰}{\sqrt{۳}}\angle o^{o} \quad \text{V}$$

$$\vec{V}_{bn} = \frac{۱۲۰}{\sqrt{۳}}\angle -۱۲۰^{o} \quad \text{V}$$

$$V_{cn} = \frac{۱۲۰}{\sqrt{۳}}\angle -۲۴۰^{o} \quad \text{V}$$

حال با توجه به اتصال ستاره بار، جریان فاز بارها (که همان جریان خط آن می‌باشد) برابر است با:

$$\vec{I}_{an} = \frac{\frac{۱۲۰}{\sqrt{۳}}\angle o^{o}}{(۰/۱ + j۰/۱) + (۴ + j۳)} = ۱۳/۴۸\angle -۳۷/۱^{o} \quad \text{A}$$

با توجه به اختلاف زاویه ۱۲۰ درجه بین جریان‌های فازی خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{bn} = ۱۳/۴۸\angle -۳۷/۱ - ۱۲۰^{o} \quad \text{A}$$

$$\vec{I}_{cn} = ۱۳/۴۸\angle -۳۷/۱ - ۲۴۰^{o} \quad \text{A}$$

این جریان‌های فازی با جریان‌های خطی برابر هستند.

ب) برای محاسبه ولتاژ هر فاز بار می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_{an\,\text{Load}} = \vec{Z}_L \vec{I}_{an} = (۴ + j۳)(۱۳/۴۸\angle -۳۷/۱^{o}) = ۶۷/۴\angle -۰/۲۳^{o}\,\text{V}$$

به همین ترتیب، ولتاژهای دو فاز دیگر بار را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\vec{V}_{bn\,\text{Load}} = ۶۷/۴\angle -۰/۲۳ - ۱۲۰^{o} = ۶۷/۴\angle -۱۲۰/۲۳^{o}\,\text{V}$$

$$\vec{V}_{cn\,\text{Load}} = ۶۷/۴\angle -۰/۲۳ - ۲۴۰^{o} = ۶۷/۴\angle -۲۴۰/۲۳^{o}\,\text{V}$$

ج) برای محاسبه ولتاژهای خطی در سه‌فاز بار، می‌توان از این خاصیت در اتصال ستاره استفاده کرد که اندازه ولتاژ خط، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه ولتاژ فازی است و زاویه آن هم، ۳۰ درجه جلوتر از زاویه ولتاژ فازی است. پس،

$$\vec{V}_{ab\,\text{Load}} = \sqrt{۳} \times ۶۷/۴ \angle -۰/۲۳ + ۳۰^o = ۱۱۶/۷۴ \angle ۲۹/۷۷^o \text{ V}$$
$$\vec{V}_{bc\,\text{Load}} = ۱۱۶/۷۴ \angle -۹۰/۲۳^o \text{ V}$$
$$\vec{V}_{ca\,\text{Load}} = ۱۱۶/۷۴ \angle -۲۱۰/۲۳^o \text{ V}$$

مثال (۱۱-۶): در صورتی که بخواهیم شرایط ولتاژهای خط و جریان‌های خط در مثال (۱۱-۵) بدون تغییر بماند، آنگاه امپدانس معادل مثلث را برای بار سه‌فاز بیابید.

حل: برای آنکه شرایط خطی یکسان باشد، باید امپدانس معادل مثلث، ۳ برابر امپدانس ستاره باشد. یعنی در هر شاخه از بار مثلث، امپدانس زیر وجود داشته باشد:

$$\vec{Z}_\Delta = ۳ \times \vec{Z}_Y = ۳(۴ + j۳) = ۱۲ + j۹\Omega$$

به عبارت دیگر، اگر بار با اتصال مثلث به امپدانس $\vec{Z}_\Delta = ۱۲ + j۹\Omega$ قرار گیرد، مشخصات جریان‌های خط و ولتاژهای خط در این مثال، همان مشخصات متناظر ارائه‌شده در مثال (۱۱-۵) می‌باشد.

مثال (۱۱-۷): یک منبع سه‌فاز با اتصال ستاره با ولتاژ خط ۲۴۰۰V مؤثر، دو بار سه‌فاز را به‌طور موازی با هم تغذیه می‌کنند. بار سه‌فاز A با اتصال ستاره، توان سه‌فاز ۳۰۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز دریافت می‌کند ولی بار سه‌فاز B با اتصال ستاره، توان ۲۴۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۶ پیش‌فاز تحویل می‌گیرد. درصورتی که توالی فاز به‌صورت abc باشد مطلوبست: الف) محاسبه جریان‌های هر فاز برای بارهای A و B ؛ ب) محاسبه امپدانس‌های هر فاز بارها؛ ج) محاسبه جریان‌های سه‌فاز منبع سه‌فاز.

حل: الف) با توجه به اتصال ستاره منبع سه‌فاز، ولتاژهای سه‌فاز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}_{an} = \frac{۲۴۰۰}{\sqrt{۳}} \angle o = ۱۳۸۵/۶ \angle o \text{ V}$$
$$\vec{V}_{bn} = ۱۳۸۵/۶ \angle -۱۲۰^o \text{ V}$$
$$\vec{V}_{cn} = ۱۳۸۵/۶ \angle -۲۴۰^o \text{ V}$$

برای محاسبه جریان‌های هر فاز بارها، ابتدا توان ظاهری $\vec{S}$ را برای هر فاز بارها به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{S}_{۱phA} = \frac{۳۰۰}{۳} \angle \cos^{-۱} ۰/۸ = ۱۰۰ \angle ۳۶/۸۷ \quad \text{kVA}$$

$$\vec{S}_{۱phB}=\frac{۲۴۰}{۳}\angle-\cos^{-۱}۰/۶=۸۰\angle-۵۳/۱۳\quad \text{kVA}$$

لازم به یاد آوری از فصل هفتم است که در صورتی که بار به‌صورت پس‌فاز باشد، زاویه ضریب قدرت ϕ با علامت مثبت برای فازور توان ظاهری، وارد می‌شود و اگر بار، به‌صورت پیش‌فاز باشد، زاویه ϕ با علامت منفی در فازور توان ظاهری پدیدار می‌گردد.
حال با استفاده از رابطه $\vec{S}_{۱ph}=\vec{V}_{۱ph}\vec{I}^{*}_{۱ph}$ ، جریان‌های هر فاز بارهای A و B را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

$$\vec{I}_{aA}=\left(\frac{\vec{S}_{۱phA}}{\vec{V}_{an}}\right)^{*}=\left(\frac{۱۰۰\times۱۰^{۳}\angle۳۶/۸۷^{o}}{۱۳۵۸/۶\angle o^{o}}\right)^{*}=۷۲/۱۷\angle-۳۶/۸۷^{o}\quad \text{A}$$

$$\vec{I}_{aB}=\left(\frac{\vec{S}_{۱phB}}{\vec{V}_{an}}\right)^{*}=\left(\frac{۸۰\times۱۰^{۳}\angle-۵۳/۱۳^{o}}{۱۳۵۸/۶\angle o^{o}}\right)^{*}=۵۷/۷۴\angle+۵۳/۱۳^{o}\quad \text{A}$$

علت آنکه ولتاژ $\vec{V}_{an}$ در محاسبه هر دو جریان بارهای A و B یکسان می‌باشد، به‌علت موازی بودن هر دو بار A و B با منبع سه‌فاز می‌باشد. جریان‌های فازهای b و c را می‌توان بترتیب با ۱۲۰ و ۲۴۰درجه تأخیر نسبت به جریان فاز a برای بارهای A و B به‌دست آورد.
ب) با توجه به محاسبه جریان‌های هر فاز برای بارهای A و B ، امپدانس‌های هر فاز دو بار را می‌توان محاسبه نمود:

$$\vec{Z}_{YA}=\frac{\vec{V}_{an}}{\vec{I}_{aA}}=\frac{۱۳۸۵/۶\angle o}{۷۲/۱۷\angle-۳۶/۸۷}=۱۹/۲\angle۳۶/۸۷\quad \Omega$$

$$\vec{Z}_{YB}=\frac{\vec{V}_{an}}{\vec{I}_{aB}}=\frac{۱۳۸۵/۶\angle o}{۵۷/۷۴\angle۵۳/۱۳}=۲۳/۹۹\angle-۵۳/۱۳\quad \Omega$$

حال اگر این دو امپدانس را به‌صورت دکارتی نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{Z}_{YA}=۱۵/۳۶+j۱۱/۵۲\quad \Omega$$

$$\vec{Z}_{YB}=۱۴/۴-j۱۹/۲\quad \Omega$$

به این نتیجه می‌رسیم که بار A را می‌توان از اتصال سری یک مقاومت $۱۵/۳۶\Omega$ و یک سلف با راکتانس $۱۱/۵۲\,\Omega$ در نظر گرفت که برای هر سه‌فاز آن به‌طور یکسان می‌باشد. همچنین بار B را نیز می‌توان از سری شدن دو عنصر مقاومت و خازن در نظر گرفت که مقدار مقاومت آن برابر $۱۴/۴\Omega$ و راکتانس خازنی برابر $۱۹/۲\Omega$ می‌باشد. پس بار A را یک بار سلفی و بار B را یک بار خازنی می‌نامیم.
ج) با توجه به آنکه بارهای A و B به‌طور موازی به منبع سه‌فاز متصل شده است، لذا سرهای فاز a از بارهای A و B، به فاز a از منبع، متصل شده است. لذا،

$$\vec{I}_{as} = \vec{I}_{aA} + \vec{I}_{aB}$$

که اندیس s به‌معنای منبع می‌باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{as} = ۷۲/۱۷\angle -۳۶/۸۷ + ۵۷/۷۴\angle ۵۳/۱۳ = ۹۲/۴\angle ۱/۷۹^\circ \quad A$$

به همین ترتیب جریان‌های فاز دوم و سوم از منبع برابراند با:

$$\vec{I}_{bs} = ۹۲/۴\angle ۱/۷۹ - ۱۲۰^o = ۹۲/۴\angle -۱۱۸/۲۱^o \quad A$$
$$\vec{I}_{cs} = ۹۲/۴\angle ۱/۷۹ - ۲۴۰^o = ۹۲/۴\angle -۲۳۸/۲۱^o \quad A$$

تمرین (۱۱-۴): دو بار سه‌فاز با اتصال مثلث از طریق یک خط سه‌فاز به یک سیستم سه‌فاز متعادل متصل شده است. بار A ، توان حقیقی سه‌فاز ۳۰kW را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز جذب می‌کند. همچنین بار B ، توان ظاهری سه‌فاز ۲۴kVA را در ضریب قدرت ۰/۹ پیش‌فاز مصرف می‌کند. در صورتی که ولتاژ خط در بارها برابر ۶۶۰V مؤثر باشد و امپدانس هر سه‌فاز خط هم برابر ۰/۶Ω باشد: الف) امپدانس هر فاز بارها را محاسبه کنید؛ ب) کل توان حقیقی دریافتی دو بار را بیابید؛ ج) کل توان تلف‌شده در خط سه‌فاز را بیابید ($۳RI^۲$ = توان تلفاتی).

جواب: الف) $Z_{\Delta A} = ۲۷/۹ + j۲۰/۹$, $Z_{\Delta B} = ۴۹ - j۲۳/۷$؛

ب) $P_{۳ph A} + P_{۳ph B} = ۵۱/۶\,kW$؛

ج) $۳RI^۲ = ۳/۸۷kW$

۱۱-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

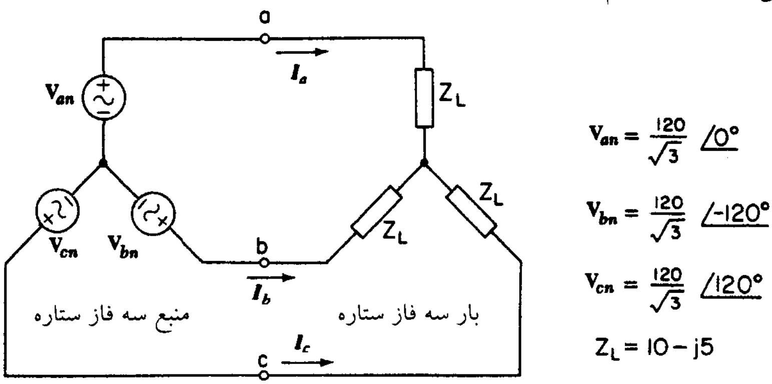
به عنوان آخرین مبحث از مباحث ارائه‌شده در این کتاب، مدارهای سه‌فاز متعادل را مورد بررسی قرار دادیم. اهمیت این فصل در تحلیل مدارهای الکتریکی از آنجا ناشی می‌شود که سیستم‌های انتقال انرژی الکتریکی به‌صورت سه‌فاز می‌باشند که در کشور ما با فرکانس ۵۰Hz صورت می‌گیرد. خلاصه مباحث ارائه‌شده در این فصل را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

- منابع و بارهای الکتریکی سه‌فاز را می‌توان به دو صورت اتصال ستاره و مثلث در نظر گرفت.
- در اتصال ستاره، اندازه ولتاژهای خطی، $\sqrt{۳}$ برابر اندازه ولتاژهای فازی است و زاویه ولتاژهای خطی نیز ۳۰ درجه جلوتر از زاویه ولتاژهای فازی است. این در حالی است که مشخصات جریان‌های خطی و فازی در اتصال ستاره دقیقاً با هم برابرند.

• در اتصال مثلث، بر عکس اتصال ستاره، ولتاژهای خطی و فازی با هم برابر می‌باشند ولی اندازه جریان‌های خطی، $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان‌های فازی می‌باشند. همچنین زاویه جریان‌های خطی، ۳۰ درجه عقب‌تر از زاویه جریان‌های فازی خواهد بود.
• توان‌های ظاهری، حقیقی و موهومی در سیستم‌های سه‌فاز (با اتصال ستاره و یا مثلث)، سه برابر توان‌های متناظر آنان در سیستم‌های تک‌فاز می‌باشد.

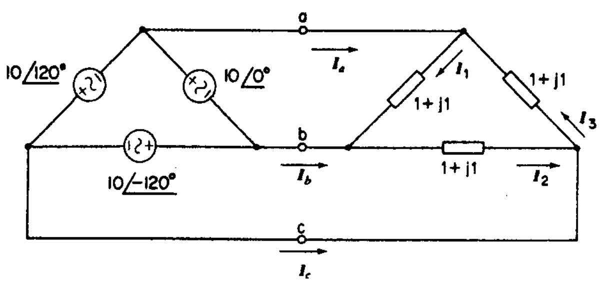
۱۱-۷- مسائل مروری

۱- در شکل (۱۱-۱۱) یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره به یک منبع سه‌فاز ستاره متصل شده است. با مشخصات ارائه‌شده در شکل، جریان هر سه‌فاز و توان مصرفی توسط هر فاز (توان حقیقی، موهومی و ظاهری) را بیابید. همچنین نمودار برداری ولتاژها و جریان‌های خطی و فازی را رسم کنید.



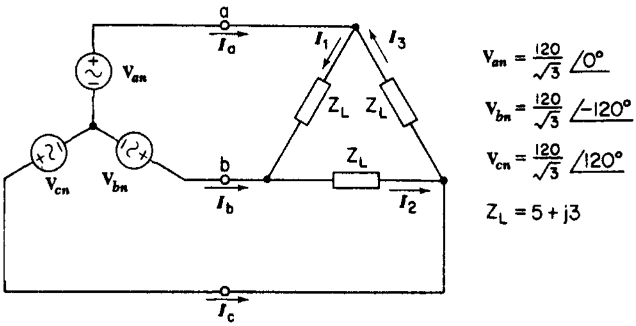
شکل (۱۱-۱۱): مدار سه‌فاز مربوط به سؤال (۱)

۲- برای مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۱۱-۱۲) جریان‌های هر شاخه بار و جریان‌های سه‌فاز خط را بیابید.



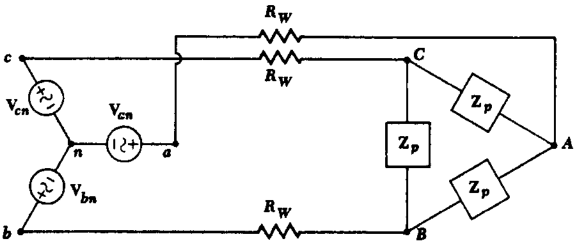
شکل (۱۱-۱۲): مدار سه‌فاز مربوط به سؤال (۲)

۳- یک بار سه‌فاز مثلث به یک منبع سه‌فاز ستاره متصل شده است که در شکل (۱۱-۱۳) مشخص شده است. در این مدار، جریان‌های سه‌فاز بار، جریان‌های خط، و ولتاژهای دو سر هر فاز از بار را محاسبه کنید. نمودار برداری این ولتاژ و جریان‌ها را رسم کنید.



شکل (۱۱-۱۳): مدار سه‌فاز مربوط به سؤال (۳)

۴- مدار سه‌فاز متعادل ارائه‌شده در شکل (۱۱-۱۴)، با ولتاژ موثر $\vec{V}_{BC} = ۱۰۰\angle ۲۰^{o} V$ و توالی فاز abc کار می‌کند. اگر بار سه‌فاز، توان حقیقی ۳kW را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز جذب کند و $R_W = ۰/۶\Omega$ باشد آنگاه: الف) کل توان تلفاتی را در مقاومت‌ها به‌دست آورید. ب) ولتاژهای $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ ، و $\vec{V}_{ca}$ در منبع متعادل را بیابید.



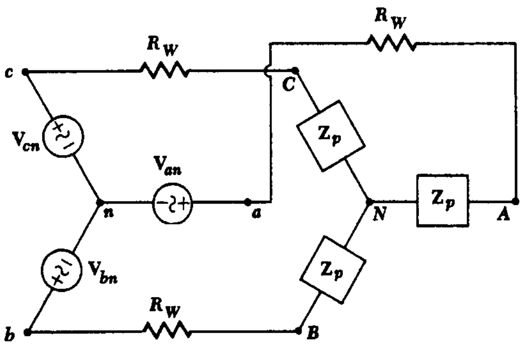
شکل (۱۱-۱۴) مدار سه‌فاز مربوط به مسائل (۴) تا (۷)

۵- در مدار شکل (۱۱-۱۴)، اگر $\vec{V}_{ab} = ۴۶۰۰\angle o V$ باشد و توالی فاز abc باشد و $R_W = ۳/۲\Omega$ باشد و منبع سه‌فاز، توان ظاهری $(۲۴۰ + j۶۰)kVA$ را تولید کند مطلوبست: الف) محاسبه $\vec{V}_{AN}$ در بار سه‌فاز؛ ب) $\vec{I}_{aA}$ ، $\vec{I}_{bB}$ ، و $\vec{I}_{aA}$ را بیابید؛ ج) مقدار امپدانس شاخه‌های بار سه‌فاز ($\vec{Z}_P$) را بیابید.

۶- در شکل (۱۱-۱۴)، اگر $\vec{Z}_P = ۲۰ + j۸\Omega$ باشد و $\vec{I}_{aA} = ۲۰\angle -۴۶^{o} A$ باشد، منبع هم در ضریب قدرت ۰/۹۴ پس‌فاز کار کند، آنگاه: الف) R_W را تعیین کنید؛ ب) توان ظاهری تحویلی منبع به مدار چقدر است؟ ج) $\vec{V}_{AB}$ را به‌دست آورید؛ د) $\vec{V}_{ab}$ را بیابید.

۷- در شکل (۱۱-۱۴) فرض کنید که $\vec{Z}_P$ به‌صورت یک امپدانس خازنی به‌مقدار $۸۰\angle -۲۴\ \Omega$ باشد که با یک سلف $۰/۲۵H$ موازی شده است. حال اگر $\vec{V}_{an} = ۲۳۰\angle o V$ و $f = ۵۰Hz$ و $R_W = ۲/۵\Omega$ باشد آنگاه: الف) $\vec{I}_{aA}$ را بیابید؛ ب) کل توان دریافتی بار را محاسبه کنید؛ ج) ضریب قدرت منبع را بیابید.

۸- شکل (۱۱-۱۵) یک سیستم سه‌فاز متعادل را نشان می‌دهد. در این سیستم $R_W = o$ و $\vec{V}_{an} = ۲۸۸/۷\angle -۳۰^o V$ می‌باشد. حال فرض کنید که هر فاز بار سه‌فاز، توان اکیتو $۲/۴kW$ را در ضریب قدرت ۰/۸ پیش‌فاز جذب می‌کند. در صورتی که توالی فاز abc باشد آنگاه: الف) $\vec{V}_{ab}$ را بیابید؛ ب) $\vec{Z}_P$ برای بار را بیابید؛ ج) جریان خط $\vec{I}_{cC}$ را بیابید؛ د) کل توان حقیقی، موهومی و ظاهری دریافتی توسط سه‌فاز بار را محاسبه کنید.



شکل (۱۱-۱۵): سیستم سه‌فاز مربوط به سؤال (۸) تا (۱۰)

۹- بار سه‌فاز متعادل نشان داده شده در شکل (۱۱-۱۵)، توان $۶kW$ را در ضریب قدرت ۰/۸۳ پس‌فاز دریافت می‌کند. فرض کنید که $R_W = ۰/۸\Omega$ و $\vec{V}_{AC} = ۱۰۰\angle ۲۰^o V$ (ولتاژ دو سر فاز در بار سه‌فاز) و توالی سیستم به‌صورت abc باشد آنگاه: الف) ولتاژهای خطی $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ ، و $\vec{V}_{ca}$ را در منبع سه‌فاز ستاره بیابید؛ ب) کل توان حقیقی، موهومی و ظاهری سه‌فاز بار موردنظر را محاسبه کنید؛

۱۰- در مدار ارائه‌شده در شکل (۱۱-۱۵)، اگر به‌جای امپدانس R_W ، یک امپدانس به‌مقدار $۱+j۱\Omega$ استفاده شود آنگاه فرضیات مسئله (۸) را تکرار کنید.