فصل دهم

شبکه‌های دو قطبی

۱۰-۱- مقدمه

در بسیاری از سیستم‌های الکتریکی از قبیل: مدارهای الکترونیکی و مخابراتی، سیستم‌های کنترل، سیستم‌های انتقال و توزیع برق و... سیگنال‌های الکتریکی (و یا انرژی الکتریکی) از طریق دو پایانه وارد سیستم شده و پس از اعمال فعل و انفعالات الکتریکی، از دو پایانه دیگر خارج می‌شود. البته دو پایانه (دو سر) خروجی می‌تواند به پایانه‌های ورودی سیستم دیگری متصل شوند. به سیستم‌هایی که دارای دو جفت پایانه باشند، شبکه‌های دو قطبی می‌گویند. به‌عبارت دیگر، به هر جفت پایانه ورودی یا خروجی، یک قطب می‌گویند و به شبکه‌هایی که دارای یک جفت پایانه باشند، شبکه‌های تک قطبی می‌گویند. در این نوع شبکه‌ها، امکان دسترسی و اتصال به هیچ یک از گره‌های داخلی شبکه وجود ندارد و ارتباط با شبکه، فقط از طریق پایانه‌های آن صورت می‌گیرد. لذا برای تحلیل این نوع شبکه‌ها فقط به سراغ روابط جریان و ولتاژ در پایانه‌های شبکه می‌رویم و کاری به ماهیت جریان‌ها و ولتاژهای درون شبکه نداریم. لذا در این فصل، ابتدا با مطالعه شبکه‌های تک قطبی، با تعدادی از پارامترهای آن آشنا شده و سپس به سراغ پارامترهای یک شبکه دو قطبی می‌رویم و خصوصیات و روش‌های تحلیل آنان را بیان می‌کنیم.

۱۰-۲- شبکه‌های تک قطبی

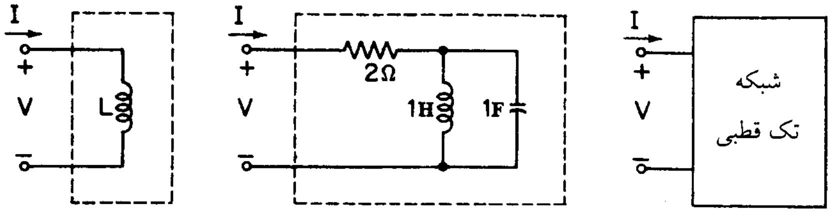
در این بخش، برآنیم تا با مفاهیم شبکه‌های تک قطبی که قابل توسعه به شبکه‌های دو قطبی هستند، آشنا شویم. این مطالب براساس توابع شبکه (از جمله توابع امپدانس،

ادمیتانس و توابع انتقال) می‌باشند. بدین منظور، مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۰-۱) را در نظر بگیرید. همان‌گونه که مشخص است، مدارهای شکل (۱۰-۱- الف) و (۱۰-۱- ب) مدارهای الکتریکی ساده‌ای می‌باشند که دارای دو پایانه هستند و شکل کلی این نوع مدارها را می‌توان مطابق شکل (۱۰-۱- ج) به‌صورت یک جعبه و دو پایانه نشان داد که ولتاژ و جریان این دو سر برابر $\vec{V}$ و $\vec{I}$ می‌باشد که به این نوع شبکه‌ها، شبکه‌های تک قطبی می‌گویند. حال برای بیان مشخصات این شبکه از طریق پایانه‌های آن، می‌توان به ارتباط ولتاژ و جریان این پایانه‌ها با یکدیگر اشاره نمود. به‌عبارت دیگر برای شکل (۱۰-۱- الف) داریم:

$$V(s) = sL.I(s) \qquad (۱-۱۰)$$

و برای شکل (۱۰-۱- ب) ارتباط $V(s)$ و $I(s)$ به‌شکل زیر در می‌آید:

$$V(s) = \frac{۲s^۲ + s + ۲}{s^۲ + ۱} I(s) \qquad (۲-۱۰)$$



(الف) (ب) (ج)

شکل (۱۰-۱): شبکه‌های تک قطبی

حال در حالت کلی برای شکل (۱۰-۱- ج) ارتباط بین متغیرهای $I(s)$ و $V(s)$ را می‌توان از طریق امپدانس $Z(s)$ بیان نمود که،

$$V(s) = Z(s).I(s) \qquad (۳-۱۰)$$

یعنی در شکل (۱۰-۱- الف)، امپدانس $Z(s)$ برابر sL و در شکل (۱۰-۱- ب) برابر $\frac{۲s^۲ + s + ۲}{s^۲ + ۱}$ می‌باشد.

همچنین ارتباط ولتاژ و جریان یک شبکه تک قطبی را می‌توان از طریق ادمیتانس شبکه نیز بیان نمود. به‌عبارت دیگر، روابط (۱۰-۱) تا (۱۰-۳) را می‌توان به‌شکل زیر نیز ارائه داد:

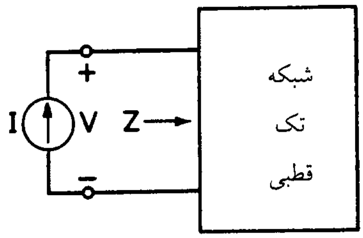
$$I(s) = \frac{۱}{sL} V(s) \qquad (۴-۱۰)$$

$$I(s) = \frac{s^۲ + ۱}{۲s^۲ + s + ۲} V(s) \qquad (۵-۱۰)$$

$$I(s) = Y(s).V(s) \qquad (۶-۱۰)$$

به عبارت دیگر، ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سر یک شبکه تک قطبی را می‌توان از طریق امپدانس و یا ادمیتانس دیده‌شده از دو سر شبکه بیان نمود. بدین منظور، اگر به دو سر شبکه موردنظر، یک منبع جریان $I(s)$ مطابق شکل (۱۰-۲) اعمال کنیم، آنگاه با تعیین ولتاژ دو سر شبکه، امپدانس شبکه به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

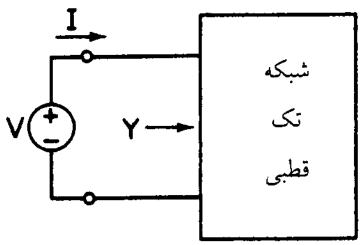
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \qquad (۷-۱۰)$$



شکل (۱۰-۲): شبکه تک قطبی تحریک‌شده با جریان

لازم به‌ذکر است که یک تابع شبکه به‌صورت $\frac{[\text{پاسخ حالت صفر}]}{[\text{ورودی یا تحریک}]}$ تعریف می‌شود. همچنین اگر ورودی به شبکه، به‌صورت یک منبع ولتاژ $V(s)$ باشد، آنگاه با تعیین جریان $I(s)$ ، ادمیتانس شبکه از دو سر آن مطابق شکل (۱۰-۳) برابر است با:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \qquad (۸-۱۰)$$



شکل (۱۰-۳): شبکه تک قطبی تحریک‌شده با ولتاژ

لازم به‌ذکر است که مطالب مذکور با این فرض ارائه شده است که هیچ منبع مستقلی در شبکه وجود ندارد، زیرا در غیر این‌صورت، در حالتی که شبکه از دو سر موردنظر

به‌صورت مدار باز باشد، آنگاه ولتاژ $V_o(s)$ ناشی از منابع مستقل داخل شبکه در دو سر شبکه ایجاد می‌شود. لذا معادله (۱۰-۳) به‌صورت زیر تغییر می‌یابد:

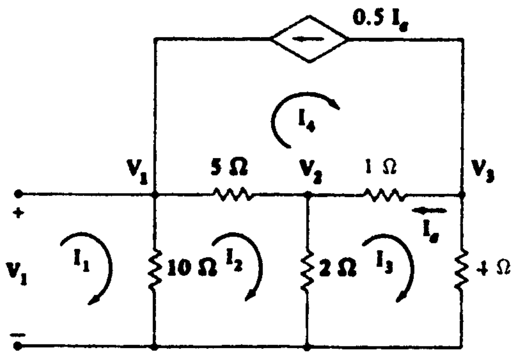
$$V(s) = Z(s).I(s) + V_o(s) \qquad (۱۰\text{-}۹)$$

که $V_o(s)$ جمله مربوط به منابع مستقل موجود در شبکه با وجود $I(s) = o$ می‌باشد. همچنین در این شرایط، معادله (۱۰-۶) نیز که با وجود ادمیتانس شبکه بود به‌شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$I(s) = Y(s).V(s) + I_o(s) \qquad (۱۰\text{-}۱۰)$$

که $I_o(s)$ جریان ناشی از منابع مستقل موجود در شبکه با وجود $V(s) = o$ (یعنی اتصال کوتاه شدن دو سر شبکه) می‌باشد.

مثال (۱۰-۱): در شبکه مقاومتی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴)، امپدانس از دو سر ورودی با ولتاژ $V_۱$ را بیابید.



شکل (۱۰-۴): شبکه الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۱)

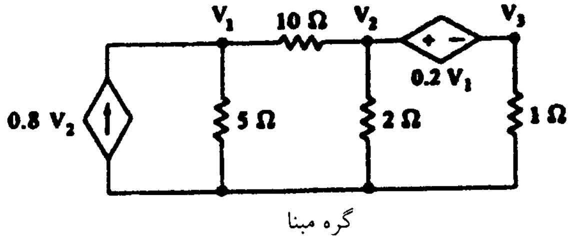
حل: برای این منظور، منبع جریانی به‌مقدار $I_۱$ به دو سر شبکه ارائه‌شده متصل می‌کنیم و سپس قوانین KCL را برای سه گره شبکه می‌نویسیم. بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -I_۱ - ۰/۵I_a + \dfrac{V_۱}{۱۰} + \dfrac{V_۱ - V_۲}{۵} = o \\ \dfrac{V_۲ - V_۱}{۵} + \dfrac{V_۲}{۲} + \dfrac{V_۲ - V_۳}{۱} = o \\ \dfrac{V_۳}{۴} + \dfrac{V_۳ - V_۲}{۱} + ۰/۵I_a = o \\ I_a = \dfrac{V_۳ - V_۲}{۱} \end{cases}$$

حال با حل معادلات فوق می‌توان امپدانس Z_{in} دیده‌شده از دو سر شبکه را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$Z_{in} = \frac{V_۱}{I_۱} = ۳/۷۱ \ \Omega$$

تمرین (۱۰-۱): یک مدار الکتریکی مطابق شکل (۱۰-۵) موردنظر می‌باشد. ادمیتانس دیده‌شده از دو سر گره ۲ و گره مبنا را محاسبه کنید.



شکل (۱۰-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۱)

راهنمایی و جواب: از مدار معادل تونن و نورتن استفاده کنید که $Y_۲ = ۰/۷ \ \mho$

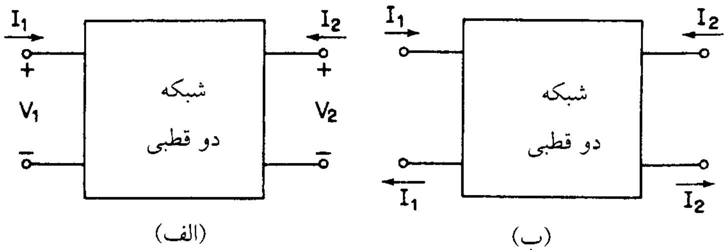
۱۰-۳- شبکه دو قطبی

حال می‌خواهیم یک شبکه دو قطبی را که از دو جفت پایانه به‌عنوان ورودی و خروجی تشکیل شده است، مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. یک شبکه دو قطبی را در حالت کلی به‌صورت شکل (۱۰-۶) در نظر می‌گیریم که زیرنویس ۱ مربوط به متغیرهای قطب ورودی (در سمت چپ) و زیرنویس ۲ برای متغیرهای قطب خروجی (سمت راست) می‌باشد. با توجه به دو قطب شبکه، چهار متغیر $V_۱$ ، $V_۲$ ، $I_۱$ و $I_۲$ تعریف می‌شوند که این چهار متغیر به شکل‌های مختلف با یکدیگر ترکیب شده و معادلات یک شبکه دو قطبی را نشان می‌دهند. بدین منظور، حالت کلی معادلات یک شبکه دو قطبی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$U_۱(s) = k_{۱۱}(s) \cdot W_۱(s) + k_{۱۲}(s) \cdot W_۲(s)$$
$$U_۲(s) = k_{۲۱}(s) \cdot W_۱(s) + k_{۲۲}(s) \cdot W_۲(s) \qquad (۱۰-۱۱)$$

که $U_۱(s)$ ، $U_۲(s)$ ، $W_۱(s)$ و $W_۲(s)$ از متغیرهای $V_۱(s)$ ، $V_۲(s)$ ، $I_۱(s)$ ، و $I_۲(s)$ انتخاب می‌شوند و $k_{ij}(s)$ ، توابع شبکه مربوط به متغیرهای انتخاب شده می‌باشد که به این $k_{ij}(s)$ها، پارامترهای شبکه[1] نیز می‌گویند.

[1]- Network Topology



شکل (۱۰-۶): متغیرها در یک شبکه دو قطبی

با توجه به اینکه متغیرهای $U_۱(s)$ و $U_۲(s)$ از چهار متغیر ولتاژ و جریان دو قطبی‌ها انتخاب می‌شوند، لذا شش حالت ممکن در انتخاب این متغیرها وجود دارد و بالطبع، دو متغیر دیگر یعنی $W_۱(s)$ و $W_۲(s)$ ، اجباراً از دو متغیر باقیمانده انتخاب می‌شوند. این شش حالت را می‌توان در جدول (۱۰-۱) مشاهده نمود. با این شش حالت، می‌توان به مشخصات شبکه و پارامترهای آن پی برد. در ادامه این فصل، خواهیم دید که با معلوم شدن پارامترهای $k_{ij}(s)$ در یکی از حالت‌ها، می‌توان دیگر پارامترهای حالت‌های دیگر را مشخص نمود.

جدول (۱۰-۱): شش حالت انتخاب متغیرهای شبکه دو قطبی

حالت	$U_۱(s)$	$U_۲(s)$	$W_۱(s)$	$W_۲(s)$
اول	$V_۱(s)$	$V_۲(s)$	$I_۱(s)$	$I_۲(s)$
دوم	$I_۱(s)$	$I_۲(s)$	$V_۱(s)$	$V_۲(s)$
سوم	$I_۱(s)$	$V_۲(s)$	$V_۱(s)$	$I_۲(s)$
چهارم	$V_۱(s)$	$I_۲(s)$	$I_۱(s)$	$V_۲(s)$
پنجم	$V_۱(s)$	$I_۱(s)$	$V_۲(s)$	$-I_۲(s)$
ششم	$V_۲(s)$	$I_۲(s)$	$V_۱(s)$	$-I_۱(s)$

۱۰-۴- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای Z

در بخش قبل، نشان دادیم که شش حالت برای انتخاب متغیرهای یک شبکه دو قطبی وجود دارد که در حالت اول آن، $U_۱(s)$ و $U_۲(s)$ به‌صورت $V_۱(s)$ و $V_۲(s)$ انتخاب می‌شوند و متغیرهای $W_۱(s)$ و $W_۲(s)$ بالطبع، متغیرهای $I_۱(s)$ و $I_۲(s)$ خواهند بود. حال با توجه به واحد متغیرهای جایگزینی در $U(s)$ و $W(s)$ (که بترتیب به‌صورت

متغیرهای ولتاژ و جریان هستند) در می‌یابیم که پارامترهای $k_{ij}(s)$ شبکه باید از جنس امپدانس باشند. لذا رابطه (۱۰-۱۱) به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)\cdot I_1(s) + z_{12}(s)\cdot I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)\cdot I_1(s) + z_{22}(s)\cdot I_2(s) \end{aligned} \qquad (۱۰\text{-}۱۲)$$

که $z_{ij}(s)$ را پارامترهای $\mathbf{Z}$ می‌گویند. در صورتی که رابطه اخیر را به‌شکل ماتریسی بنویسیم داریم:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(s)\cdot\mathbf{I}(s) \qquad (۱۰\text{-}۱۳)$$

به ماتریس $\mathbf{Z}(s)$ ، ماتریس پارامترهای $\mathbf{z}$ می‌گویند.

حال می‌خواهیم ببینیم برای یک شبکه دو قطبی موردنظر، پارامترهای $z_{11}(s)$ ، $z_{12}(s)$ ، $z_{21}(s)$ ، و $z_{22}(s)$ را چگونه می‌توان محاسبه نمود.

محاسبه $z_{11}(s)$ و $z_{21}(s)$: برای محاسبه $z_{11}(s)$ فرض کنید که قطب خروجی شبکه به‌صورت مدار باز باشد تا $I_2(s)=o$ گردد. در نتیجه با استفاده از رابطه (۱۰-۱۲) خواهیم داشت:

$$V_1(s) = z_{11}(s)\cdot I_1(s)\Big|_{I_2(s)=o} \qquad (۱۰\text{-}۱۴)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)\cdot I_1(s)\Big|_{I_2(s)=o} \qquad (۱۰\text{-}۱۵)$$

به عبارت دیگر، برای محاسبه $z_{11}(s)$ کافی است که با اتصال یک منبع جریان $I_1(s)$ به قطب ورودی و اتصال باز نمودن قطب خروجی، ولتاژ دو سر قطب ورودی $V_1(s)$ را اندازه‌گیری کنیم. در نتیجه،

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}\bigg|_{I_2(s)=o} \qquad ۱۰\text{-}۱۶)$$

همچنین اگر در همین شرایط، ولتاژ دو سر قطب خروجی (یعنی $V_2(s)$) را اندازه‌گیری کنیم خواهیم داشت:

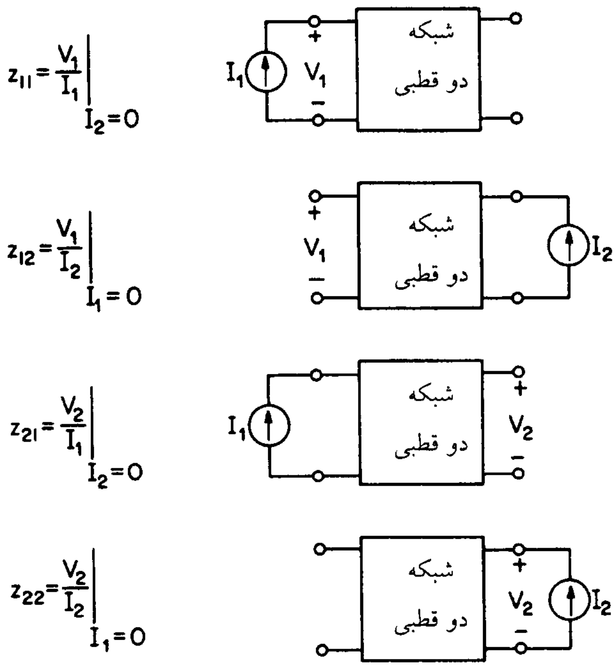
$$z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)}\bigg|_{I_2(s)=o} \qquad (۱۰\text{-}۱۷)$$

محاسبه $z_{12}(s)$ و $z_{22}(s)$: مشابه حالت قبل، برای محاسبه این دو پارامتر z ، یک منبع جریان نابسته $I_2(s)$ به قطب خروجی متصل می‌کنیم. حال با اندازه‌گیری ولتاژ دو قطب ورودی و خروجی بترتیب $z_{12}(s)$ و $z_{22}(s)$ به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$z_{12}(s) = \left.\frac{V_1(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1(s)=o} \qquad (۱۸-۱۰)$$

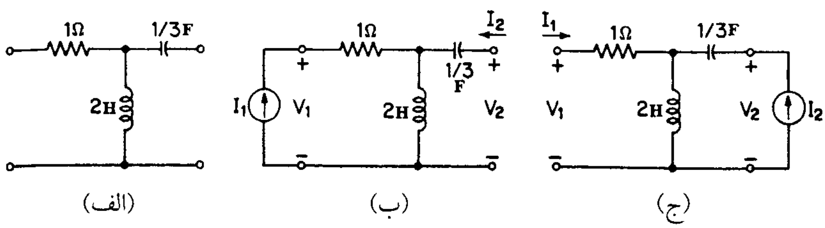
$$z_{22}(s) = \left.\frac{V_2(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1(s)=o} \qquad (۱۹-۱۰)$$

نحوه محاسبه این چهار پارامتر را می‌توان به‌صورت شماتیک در شکل (۱۰-۷) مشاهده نمود.



شکل (۱۰-۷): نحوه محاسبه پارامترهای ماتریس امپدانس Z

مثال (۱۰-۲): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۸- الف)، ماتریس امپدانس **Z** و پارامترهای آن را بیابید.



شکل (۱۰-۸): شبکه مربوط به مثال (۱۰-۲)

حل: برای تعیین $z_{11}(s)$ و $z_{21}(s)$ یک منبع جریان نابسته به قطب ورودی (سمت چپ مدار) مطابق شکل (۱۰-۸- ب) متصل می‌کنیم. آنگاه با استفاده از رابطه KVL داریم:

$$V_1(s) = 1 \times I_1(s) + 2s.I_1(s)$$

و در نتیجه،

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = 1 + 2s$$

همچنین ولتاژ خروجی $V_2(s)$ برابر است با:

$$V_2(s) = 2sI_1(s)$$

$$Z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = 2s$$

همچنین برای محاسبه $z_{22}(s)$ و $z_{12}(s)$ باید یک منبع جریان نابسته به قطب خروجی (سمت راست مدار) مطابق شکل (۱۰-۸- ج) متصل شود. در نتیجه با نوشتن رابطه KVL داریم:

$$V_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{3}s} \times I_2(s) + 2sI_2(s)$$

لذا،

$$Z_{22}(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = \frac{1}{\frac{1}{3}s} + 2s$$

همچنین برای محاسبه $z_{12}(s)$ ولتاژ دو سر سلف را در این حالت محاسبه می‌کنیم. یعنی،

$$V_1(s) = 2s.I_2(s)$$

$$z_{12}(s) = \frac{V_1(s)}{I_2(s)} = 2s$$

در نهایت ماتریس امپدانس $\mathbf{Z}(s)$ به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2s & 2s \\ 2s & \frac{3}{s}+2s \end{bmatrix}$$

همان‌گونه که از این مثال هم مشخص است، برای تعیین پارامترهای امپدانس شبکه مذکور، باید حتماً یک قطب از شبکه در حالت مدار باز باشد. لذا به این پارامترها، پارامترهای امپدانس مدار باز[1] نیز می‌گویند. همچنین در صورتی که $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ باشد آنگاه شبکه دو قطبی موردنظر را شبکه دو قطبی متقابل می‌گویند و ماتریس امپدانس آن را هم

---

[1]- Open Circuit Impedance Parameters

ماتریس امپدانس متقارن[1] می‌نامند. به‌راحتی قابل اثبات است که چنانچه یک شبکه دو قطبی از المان‌های مقاومت، سلف، خازن، و ترانسفورماتورها تشکیل شده باشد آنگاه دو قطبی مذکور، حتماً یک شبکه متقابل خواهد بود.

- کاربرد دیگری از پارامترهای امپدانس یک شبکه دو قطبی

یکی از کاربردهای اساسی پارامترهای امپدانس یک شبکه دو قطبی، تعیین تابع انتقال ولتاژی یا جریانی است، که می‌توان این توابع را برحسب پارامترهای امپدانس تعیین نمود. بدین منظور، فرض کنید که بخواهیم تابع انتقال ولتاژی $\frac{V_1(s)}{V_2(s)}$ را در حالت مدار باز به‌دست آوریم. به‌عبارت دیگر، برای تعیین این تابع انتقال، باید $I_2(s)=o$ باشد. لذا برای این شبکه دو قطبی داریم:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)I_1(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)I_1(s) \end{aligned} \qquad (۲۰-۱۰)$$

و در نتیجه با تقسیم این دو رابطه بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{z_{11}(s)}{z_{21}(s)} \qquad (۲۱-۱۰)$$

به طور مشابه اگر بخواهیم تابع انتقال جریانی با اتصال کوتاه قطب خروجی یعنی $\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$ را محاسبه کنیم آنگاه می‌بینیم که باید شرط $V_2(s)=o$ رعایت گردد. لذا معادله قطب خروجی شبکه دو قطبی موردنظر به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$o=z_{21}(s)\cdot I_1(s)+z_{22}(s)\cdot I_2(s) \qquad (۲۲-۱۰)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=\frac{-z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \qquad (۲۳-۱۰)$$

کاربرد دیگری که می‌توان با استفاده از پارامترهای امپدانس شبکه دو قطبی بیان نمود، محاسبه تابع امپدانس دیده‌شده از قطب ورودی با وجود اتصال کوتاه در قطب خروجی می‌باشد. در این حالت، روابط شبکه دو قطبی (۱۰-۱۲) را به‌شکل زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)\cdot I_1(s)+z_{12}(s)\cdot I_2(s) \\ o &= z_{21}(s)\cdot I_1(s)+z_{22}(s)\cdot I_2(s) \end{aligned} \qquad (۲۴-۱۰)$$

لذا با حذف $I_2(s)$ از دسته معادله اخیر، $\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$ برابر خواهد شد با:

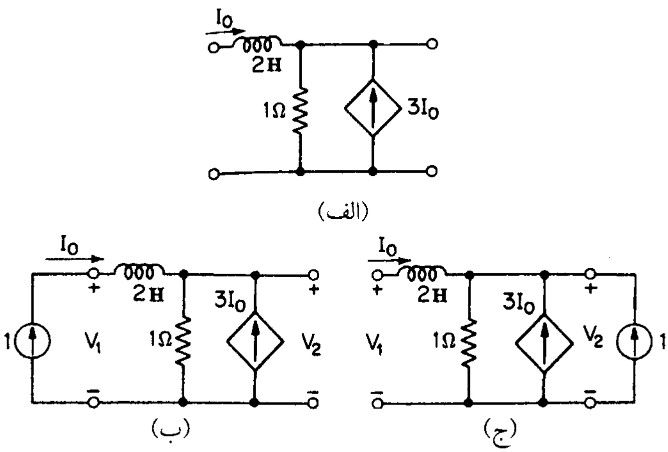
[1]- Symetric z-papameter Matrix

$$\frac{V_۱(s)}{I_۱(s)} = z_{۱۱}(s) - \frac{z_{۱۲}(s)\cdot z_{۲۱}(s)}{z_{۲۲}(s)} \qquad (۲۵-۱۰)$$

که این امپدانس، امپدانس اتصال کوتاه یک شبکه دو قطبی با اتصال کوتاه قطب خروجی است. حال اگر همین اتصالی در قطب ورودی صورت گیرد، آنگاه به‌طریق مشابه، امپدانس دو قطبی دیده‌شده از سرهای قطب خروجی برابر خواهد بود با:

$$\frac{V_۲(s)}{I_۲(s)} = z_{۲۲}(s) - \frac{z_{۲۱}(s).z_{۱۲}(s)}{z_{۱۱}(s)} \qquad (۲۶-۱۰)$$

تمرین (۱۰-۲): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۹- الف) موردنظر است. برای دو قطبی موردنظر، پارامترهای امپدانسی ماتریس امپدانس آن را بیابید. برای این منظور از شکل‌های (۱۰-۹- ب) و (۱۰-۹- ج) استفاده کنید.



شکل (۱۰-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۲)

جواب: $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} ۲s+۴ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

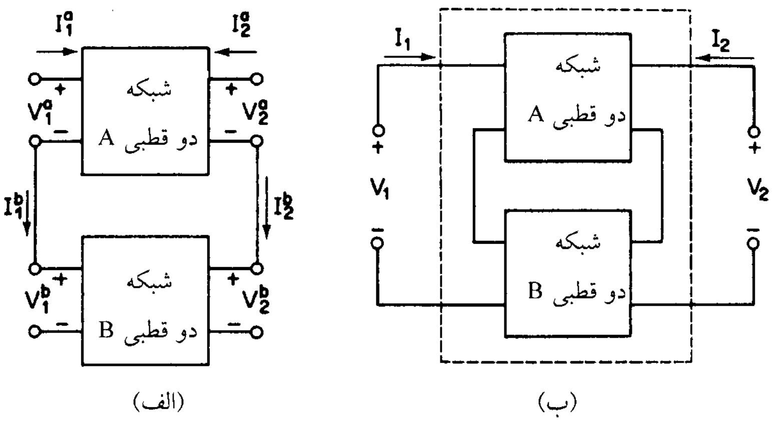
۱۰-۵- پارامترهای امپدانس در اتصال سری شبکه‌های دو قطبی

در بسیاری از مواقع، شبکه‌های دو قطبی متعددی به‌صورت سری و یا موازی به یکدیگر متصل می‌شوند. لذا باید بتوان ماتریس امپدانس کل شبکه را محاسبه نمود. برای این منظور، فرض کنید دو شبکه دو قطبی A و B با پارامترهای امپدانس $z_{ij}^{a}(s)$ و

$z_{ij}^{b}(s)$ وجود دارد که مطابق شکل (۱۰-۱۰- الف) به‌طور سری به‌یکدیگر متصل شده‌اند. بدین منظور، فرض کنید که معادلات این دو شبکه دو قطبی به‌صورت زیر باشند:

$$\mathbf{V}^a(s)=\begin{bmatrix}V_1^a(s)\\V_2^a(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s)\\z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_1^a(s)\\I_2^a(s)\end{bmatrix}=\mathbf{Z}^a(s)\cdot\mathbf{I}^a(s) \qquad (۲۷-۱۰)$$

$$\mathbf{V}^b(s)=\begin{bmatrix}V_1^b(s)\\V_2^b(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{11}^b(s) & z_{12}^b(s)\\z_{21}^b(s) & z_{22}^b(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^b(s)\\I_2^b(s)\end{bmatrix}=\mathbf{Z}^b(s)\cdot\mathbf{I}^b(s) \qquad (۲۸-۱۰)$$



شکل (۱۰-۱۰): اتصال سری دو شبکه دو قطبی

اکنون می‌خواهیم ماتریس امپدانس شبکه دو قطبی معادل را که در شکل (۱۰-۱۰- ب) نشان داده شده است، محاسبه کنیم. به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم ماتریس امپدانسی شبکه دو قطبی منتجه شکل (۱۰-۱۰- ب) را به‌صورت زیر محاسبه نماییم:

$$\mathbf{V}(s)=\begin{bmatrix}V_1(s)\\V_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{11}(s) & z_{12}(s)\\z_{21}(s) & z_{22}(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_1(s)\\I_2(s)\end{bmatrix}=\mathbf{Z}(s)\cdot\mathbf{I}(s) \qquad (۲۹-۱۰)$$

با توجه به خواص مدارهای سری، بردار ولتاژ و جریان شبکه دو قطبی معادل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V}(s)=\begin{bmatrix}V_1(s)\\V_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_1^a(s)+V_1^b(s)\\V_2^a(s)+V_2^b(s)\end{bmatrix}=\mathbf{V}^a(s)+\mathbf{V}^b(s) \qquad (۳۰-۱۰)$$

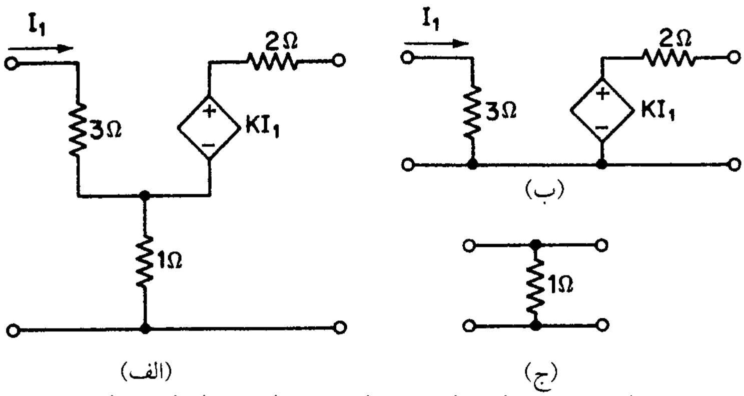
$$\mathbf{I}(s)=\begin{bmatrix}I_1(s)\\I_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^a(s)\\I_2^a(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^b(s)\\I_2^b(s)\end{bmatrix}=\mathbf{I}^a(s)=\mathbf{I}^b(s) \qquad (۳۱-۱۰)$$

با ترکیب روابط (۱۰-۲۹)، (۱۰-۳۰) و (۱۰-۳۱) داریم:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{V}^a(s) + \mathbf{V}^b(s) = \mathbf{Z}^a(s).\mathbf{I}^a(s) + \mathbf{Z}^b(s).\mathbf{I}^b(s) = \\ = \left[\mathbf{Z}^a(s) + \mathbf{Z}^b(s)\right]\mathbf{I}(s) = \mathbf{Z}(s).\mathbf{I}(s) \qquad (۳۲-۱۰)$$

از رابطه اخیر، نتیجه می‌گیریم که اگر دو شبکه دو قطبی مطابق شکل (۱۰-۱۰- الف) با یکدیگر سری شوند، آنگاه ماتریس امپدانسی منتجه برای شبکه دو قطبی معادل، برابر مجموع ماتریس‌های امپدانسی دو شبکه سری شده می‌باشد.

مثال (۱۰-۳): شکل (۱۰-۱۱- الف)، یک مدار الکتریکی با سه مقاومت و یک منبع ولتاژ وابسته را نشان می‌دهد. در صورتی که این شبکه را به دو شبکه (۱۰-۱۱- ب) و (۱۰-۱۱- ج) تقسیم کنیم، با استفاده از خاصیت سری بودن دو شبکه دو قطبی، ماتریس امپدانسی شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۱۱- الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۱۱): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۳)

حل: برای شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۱۱- ب) ماتریس امپدانس شبکه برابر است با:

$$\mathbf{Z}^a(s) = \begin{bmatrix} ۳ & o \\ k & ۲ \end{bmatrix}$$

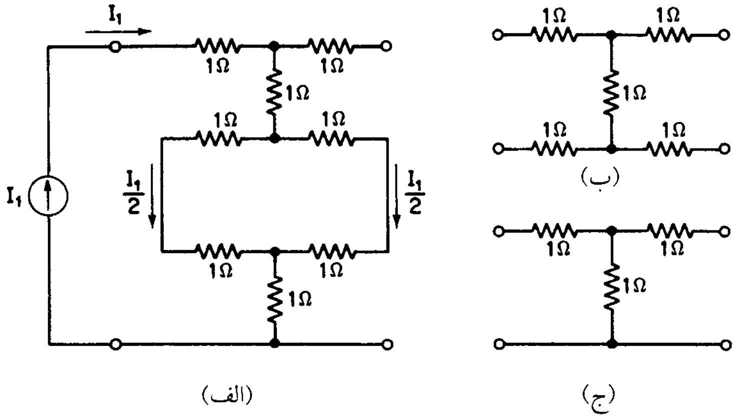
همچنین برای شبکه شکل (۱۰-۱۱- ج) خواهیم داشت:

$$\mathbf{Z}^b_{(s)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا با جمع دو ماتریس امپدانسی $\mathbf{Z}^a_{(s)}$ و $\mathbf{Z}^b_{(s)}$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ k+۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

تمرین (۱۰-۳): شبکه دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۱۲- الف) موردنظر است. با تقسیم شبکه مذکور به دو شبکه مطابق با شکل‌های (۱۰-۱۲- ب) و (۱۰-۱۲- ج) و با استفاده از خاصیت سری شدن شبکه‌های دو قطبی، ماتریس امپدانس شبکه شکل (۱۰-۱۲- الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۳)

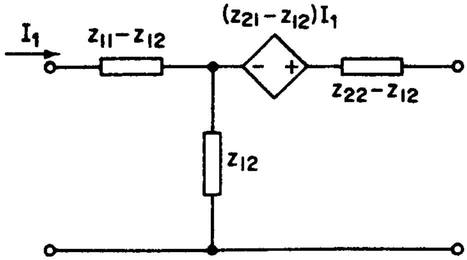
جواب: $\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

۱۰-۶- مدار معادل T یک شبکه دو قطبی

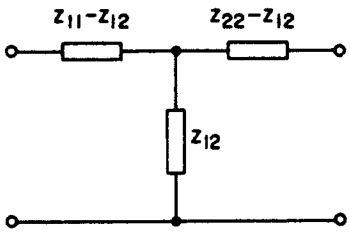
نوع دیگری از نمایش شبکه‌های دو قطبی، استفاده از مدار معادل **T** است. برای نمایش مدل **T** باید به روابط اساسی یک شبکه دو قطبی بازگردیم که این روابط به‌صورت زیر بودند:

$$v_۱(s)=z_{۱۱}(s)\cdot I_۱(s)+z_{۱۲}(s)\cdot I_۲(s)$$
$$v_۲(s)=z_{۲۱}(s)\cdot I_۱(s)+z_{۲۲}(s)\cdot I_۲(s)$$

حال برای نمایش این روابط به‌صورت مدار الکتریکی معادل شکل **T** ، می‌توان به‌شکل (۱۰-۱۳) مراجعه نمود که دارای یک منبع ولتاژ وابسته می‌باشد. در صورتی که شبکه دو قطبی، به‌صورت یک شبکه دو قطبی متقابل باشد آنگاه $z_{۱۲}(s)=z_{۲۱}(s)$ خواهد بود. در نتیجه، منبع ولتاژ وابسته حذف خواهد شد و شکل (۱۰-۱۴) حاصل می‌شود. این وضعیت، در شرایطی ایجاد می‌شود که شبکه دو قطبی از عناصر سلف، خازن، و مقاومت تشکیل شده باشد.



شکل (۱۰-۱۳): مدار معادل T یک شبکه دو قطبی



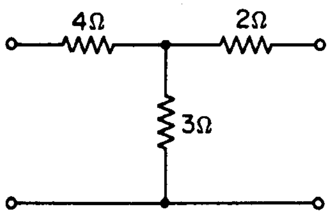
شکل (۱۰-۱۴): مدار معادل T یک شبکه دو قطبی با $z_{12}(s)=z_{21}(s)$

مثال (۱۰-۴): در صورتی که ماتریس امپدانس یک شبکه دو قطبی برابر رابطه زیر باشد:

$$\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

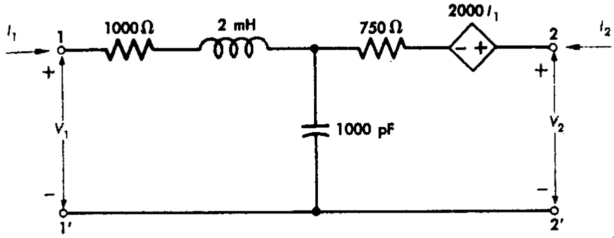
آنگاه مدل T شبکه دو قطبی موردنظر را بیابید.

حل: با توجه به شکل (۱۰-۱۴) و با در نظر گرفتن اینکه $z_{12}(s)=z_{21}(s)=۳$ می‌باشد لذا مدل T شبکه دو قطبی با $\mathbf{Z}(s)$ مذکور به‌صورت شکل (۱۰-۱۵) خواهد بود.



شکل (۱۰-۱۵): مدل T شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۴)

تمرین (۱۰-۴): برای مدل T شبکه دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۱۶)، ماتریس امپدانسی شبکه مذکور را بیابید. سرعت زاویه ای مدار برابر $\omega=۱۰^۶ \text{rad/sec}$ است.



شکل (۱۰-۱۶): مدل T شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۴)

جواب:
$$\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix} ۱۰۰۰+j۱۰۰۰ & -j۱۰۰۰ \\ ۲۰۰۰-j۱۰۰۰ & ۷۵۰-j۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$

۱۰-۷- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای y

در جدول (۱۰-۱) شش حالت را برای ارتباط متغیرهای مستقل و وابسته و به‌منظور بیان روابط کلی یک شبکه دو قطبی بیان نمودیم. حالت دوم در این جدول، آن بود که ولتاژهای $V_۱(s)$ و $V_۲(s)$ به‌عنوان متغیرهای مستقل، و جریان‌های $I_۱(s)$ و $I_۲(s)$ به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شوند. در این حالت، پارامترهای شبکه $k_{ij}(s)$ به‌صورت پارامترهای ادمیتانس $y_{ij}(s)$ در می‌آیند و در نتیجه، معادلات این شبکه دو قطبی به‌شکل زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} I_۱(s)&=y_{۱۱}(s)\cdot V_۱(s)+y_{۱۲}(s)\cdot V_۲(s) \\ I_۲(s)&=y_{۲۱}(s)\cdot V_۱(s)+y_{۲۲}(s)\cdot V_۲(s) \end{aligned} \qquad (۱۰-۳۳)$$

این دسته معادلات را می‌توان به‌شکل ماتریسی نیز نوشت. یعنی،

$$\mathbf{I}(s)=\begin{bmatrix} I_۱(s) \\ I_۲(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{۱۱}(s) & y_{۱۲}(s) \\ y_{۲۱}(s) & y_{۲۲}(s) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} V_۱(s) \\ V_۲(s) \end{bmatrix}=\mathbf{Y}(s)\cdot\mathbf{V}(s) \qquad (۱۰-۳۴)$$

که به ماتریس $\mathbf{Y}(s)$ ، ماتریس پارامترهای **y** می‌گویند.

حال مشابه ماتریس پارامترهای z می‌خواهیم ببینیم برای یک شبکه دو قطبی، پارامترهای $y_{۱۱}(s)$ ، $y_{۱۲}(s)$ ، $y_{۲۱}(s)$ و $y_{۲۲}(s)$ را چگونه محاسبه کنیم.

محاسبه $\mathbf{y_{۱۱}(s)}$ و $\mathbf{y_{۲۱}(s)}$: به‌منظور محاسبه $y_{۱۱}(s)$ باید قطب خروجی شبکه، اتصال کوتاه شود تا ولتاژ $V_۲(s)=o$ گردد. حال با استفاده از یک منبع ولتاژ $V_۱(s)$ در قطب ورودی و اندازه‌گیری جریان‌های $I_۱(s)$ و $I_۲(s)$ می‌توان نوشت:

$$y_{۱۱}(s)=\left.\frac{I_۱(s)}{V_۱(s)}\right|_{V_۲(s)=o} \qquad (۱۰-۳۵)$$

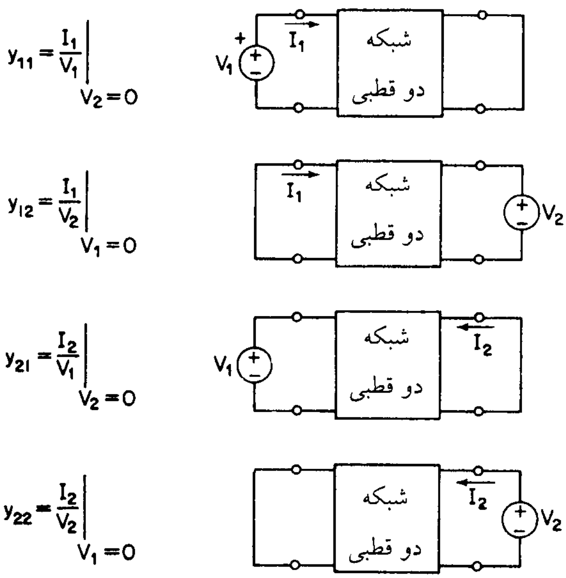
$$y_{21}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2(s)=o} \qquad (۳۶-۱۰)$$

محاسبه $\mathbf{y_{22}(s)}$ و $\mathbf{y_{12}(s)}$: مشابه حالت قبل و برای محاسبه این دو پارامتر y ، یک منبع ولتاژ نابسته $V_2(s)$ به قطب خروجی شبکه دو قطبی موردنظر متصل شده و در همین حال، قطب ورودی آن اتصال کوتاه می‌شود تا شرط $V_1(s) = o$ برقرار گردد. در این حالت، با توجه به معادلات شبکه دو قطبی بر اساس ماتریس ادمیتانس، مقادیر $y_{22}(s)$ و $y_{12}(s)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$y_{12}(s) = \left.\frac{I_1(s)}{V_2(s)}\right|_{V_1(s)=o} \qquad (۳۷-۱۰)$$

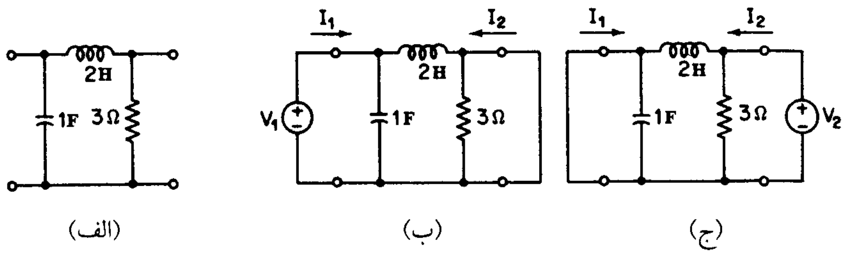
$$y_{22}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{V_2(s)}\right|_{V_1(s)=o} \qquad (۳۸-۱۰)$$

نحوه محاسبه این چهار پارامتر ماتریس ادمیتانس را می‌توان به‌طور شماتیک در شکل (۱۰-۱۷) مشاهده نمود.



شکل (۱۰-۱۷): نحوه محاسبه پارامترهای ماتریس ادمیتانس Y

مثال (۱۰-۵): در شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۱۸- الف) ماتریس ادمیتانس شبکه را محاسبه نمایید.



شکل (۱۰-۱۸): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۵)

حل: به‌منظور تعیین $y_{۱۱}(s)$ و $y_{۲۱}(s)$ ، منبع ولتاژ $V_۱(s)$ به قطب ورودی متصل می‌کنیم و قطب خروجی، اتصال کوتاه می‌گردد که در شکل (۱۰-۱۸- ب) نشان داده شده است. در نتیجه با استفاده از معادلات KCL می‌توان نوشت:

$$I_۱(s)=sV_۱(s)+\frac{۱}{۲s}V_۱(s)$$
$$y_{۱۱}(s)=\frac{I_۱(s)}{V_۱(s)}=\frac{۲s^۲+۱}{۲s}$$

همچنین،

$$I_۲(s)=-\frac{۱}{۲s}V_۱(s)$$
$$y_{۲۱}(s)=\frac{I_۲(s)}{V_۱(s)}=\frac{-۱}{۲s}$$

از طرف دیگر برای محاسبه $y_{۲۲}(s)$ و $y_{۱۲}(s)$ ، باید قطب ورودی، اتصال کوتاه شده و منبع ولتاژ نابسته $V_۲(s)$ به قطب خروجی متصل گردد. لذا در این حالت و بر اساس شکل (۱۰-۱۸- ج)خواهیم داشت:

$$I_۲(s)=\frac{V_۲(s)}{۳}+\frac{V_۲(s)}{۲s}$$
$$y_{۲۲}(s)=\frac{I_۲(s)}{V_۲(s)}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲s}=\frac{۲s+۳}{۶s}$$

از طرف دیگر،

$$I_۱(s)=-\frac{V_۲(s)}{۲s}$$

و در نتیجه،

$$y_{۱۲}(s)=\frac{I_۱(s)}{V_۲(s)}=\frac{-۱}{۲s}$$

در نهایت، ماتریس ادمیتانس **Y** به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix}\frac{۲s^{۲}+۱}{۲s} & \frac{-۱}{۲s}\\ \frac{-۱}{۲s} & \frac{۲s+۳}{۶s}\end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب ارائه‌شده و با در نظر گرفتن مثال اخیر در می‌یابیم که حتماً باید یکی از قطب‌های شبکه در حال اتصال کوتاه باشد. لذا به این پارامترها، پارامترهای ادمیتانسی اتصال کوتاه[1] نیز گفته می‌شود. بعلاوه در صورتی که $y_{۱۲}(s)=y_{۲۱}(s)$ باشد، آنگاه شبکه دو قطبی مذکور را شبکه دو قطبی متقابل می‌نامند و ماتریس ادمیتانس آن را هم ماتریس ادمیتانس متقارن[2] می‌گویند. به‌راحتی می‌توان اثبات نمود که چنانچه یک شبکه دو قطبی از عناصر مقاومت، سلف، خازن و ترانسفورماتورها تشکیل شده باشد آنگاه دو قطبی موردنظر حتماً به‌صورت یک شبکه دو قطبی متقابل است.

- کاربرد دیگری از پارامترهای ادمیتانس یک شبکه دو قطبی

مشابه پارامترهای امپدانسی یک شبکه دو قطبی، یکی از کاربردهای پارامترهای **y** ، تعیین توابع انتقال ولتاژی یا جریانی برحسب پارامترهای ادمیتانسی می‌باشد. بدین منظور، فرض کنید که بخواهیم تابع انتقال جریانی $\frac{I_{۱}(s)}{I_{۲}(s)}$ را در حالت اتصال کوتاه محاسبه نماییم. به‌عبارت دیگر، فرض می‌شود که $V_{۲}(s)=o$ باشد. لذا برای دو قطبی موردنظر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}I_{۱}(s)&=y_{۱۱}(s)\cdot V_{۱}(s)\\ I_{۲}(s)&=y_{۲۱}(s)\cdot V_{۱}(s)\end{aligned} \qquad (۳۷-۱۰)$$

و با تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{I_{۱}(s)}{I_{۲}(s)}=\frac{y_{۱۱}(s)}{y_{۲۱}(s)} \qquad (۳۸-۱۰)$$

حال اگر بخواهیم تابع انتقال ولتاژ را با شرط اتصال باز بودن قطب خروجی (یعنی $I_{۲}(s)=o$) محاسبه کنیم آنگاه معادله قطب خروجی شبکه موردنظر برابر خواهد بود با:

$$o=y_{۲۱}(s)\cdot V_{۱}(s)+y_{۲۲}(s)\cdot V_{۲}(s) \qquad (۳۹-۱۰)$$

در نتیجه، نسبت $\frac{V_{۲}(s)}{V_{۱}(s)}$ ، برابر رابطه زیر خواهد بود:

$$\frac{V_{۲}(s)}{V_{۱}(s)}=\frac{-y_{۲۱}(s)}{y_{۲۲}(s)} \qquad (۴۰-۱۰)$$

[1]- Short Circuit Admitance Parameters
[2]- Symmetric y-Parameter Matrix

کاربرد دیگری که از ماتریس‌های امپدانسی و ادمیتانسی شبکه‌های دو قطبی می‌توان بیان نمود، ارتباط این دو ماتریس با یکدیگر و نحوه محاسبه هر کدام با استفاده از دیگری می‌باشد. بدین منظور، برای یک دو شبکه قطبی داریم:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s) \qquad (۱۰-۴۱)$$

اما با استفاده از پارامترهای ادمیتانسی می‌دانیم که،

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{V}(s) \qquad (۱۰-۴۲)$$

با جایگزینی رابطه (۱۰-۴۲) در (۱۰-۴۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) \qquad (۱۰-۴۳)$$

که از این رابطه در می‌یابیم که حاصل ضرب ماتریس ادمیتانس و امپدانس با یکدیگر برابر ماتریس واحد خواهد بود. لذا،

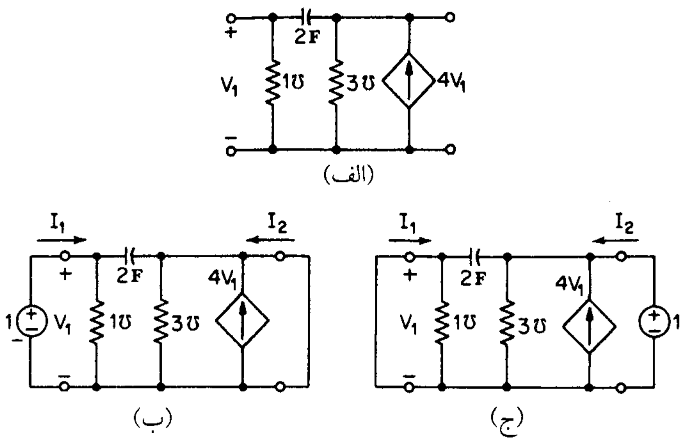
$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Y}^{-1}(s) \quad , \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) \qquad (۱۰-۴۴)$$

در نتیجه پارامترهای y_{ij} و z_{ij} را می‌توان به‌صورت زیر بر حسب هم محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}(s)} \begin{bmatrix} z_{22}(s) & -z_{12}(s) \\ -z_{21}(s) & z_{11}(s) \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۴۵)$$

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}(s)} \begin{bmatrix} y_{22}(s) & -y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & y_{11}(s) \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۴۶)$$

تمرین (۱۰-۵): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۱۹- الف)، ماتریس ادمیتانسی شبکه دو قطبی مربوطه را بیابید. برای محاسبه پارامترهای **y** ، از شکل‌های (۱۰-۱۹- ب) و (۱۰-۱۹- ج) می‌توانید استفاده کنید.



شکل (۱۰-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۵)

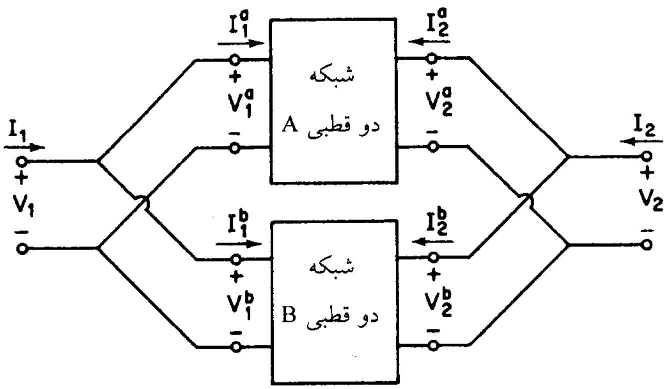
جواب: $\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix} ۲s+۱ & -۲s \\ -۲s-۴ & ۲s+۳ \end{bmatrix}$

۱۰-۸- پارامترهای ادمیتانس در اتصال موازی شبکه‌های دو قطبی

مشابه حالت سری در شبکه‌های دو قطبی، شرایطی ایجاد می‌شود که دو شبکه دو قطبی به شکل موازی با هم متصل گردند. لذا برای محاسبه روابط بین ولتاژ و جریان شبکه دو قطبی منتجه، می‌توان از ماتریس‌های ادمیتانسی این دو شبکه استفاده نمود. بدین منظور فرض کنید که دو شبکه A و B مطابق شکل (۱۰-۲۰) با هم به‌طور موازی اتصال یابند که هر کدام از این دو شبکه، بترتیب دارای پارامترهای ادمیتانسی y_{ij}^a و y_{ij}^b می‌باشند. لذا معادلات این دو شبکه را به‌صورت زیر مدنظر قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{I}^a(s)=\begin{bmatrix} I_۱^a(s) \\ I_۲^a(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{۱۱}^a(s) & y_{۱۲}^a(s) \\ y_{۲۱}^a(s) & y_{۲۲}^a(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱^a(s) \\ V_۲^a(s) \end{bmatrix}=\mathbf{Y}^a(s)\cdot\mathbf{V}^a(s) \qquad (۴۷\text{-}۱۰)$$

$$\mathbf{I}^b(s)=\begin{bmatrix} I_۱^b(s) \\ I_۲^b(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{۱۱}^b(s) & y_{۱۲}^b(s) \\ y_{۲۱}^b(s) & y_{۲۲}^b(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱^b(s) \\ V_۲^b(s) \end{bmatrix}=\mathbf{Y}^b(s)\cdot\mathbf{V}^b(s) \qquad (۴۸\text{-}۱۰)$$



شکل (۱۰-۲۰): اتصال موازی دو شبکه دو قطبی

حال در صورتی که این دو شبکه با یکدیگر موازی باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$V_۱(s)=V_۱^a(s)=V_۱^b(s) \quad , \quad V_۲(s)=V_۲^a(s)=V_۲^b(s) \qquad (۴۹\text{-}۱۰)$$

$$I_۱(s)=I_۱^a(s)+I_۱^b(s) \quad , \quad I_۲(s)=I_۲^a(s)+I_۲^b(s) \qquad (۵۰\text{-}۱۰)$$

در نتیجه، اگر ماتریس ادمیتانس شبکه منتجه را با پارامترهای y_{ij} در نظر بگیریم آنگاه رابطه زیر برای این شبکه صادق خواهد بود:

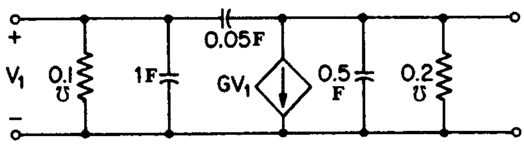
$$\mathbf{I}(s)=\begin{bmatrix} I_۱(s) \\ I_۲(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{۱۱}(s) & y_{۱۲}(s) \\ y_{۲۱}(s) & y_{۲۲}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱(s) \\ V_۲(s) \end{bmatrix}=\mathbf{Y}(s)\cdot\mathbf{V}(s) \qquad (۵۱-۱۰)$$

که با توجه به خواص ارائه‌شده در روابط (۱۰-۴۹) و (۱۰-۵۰) نتیجه می‌گیریم که،

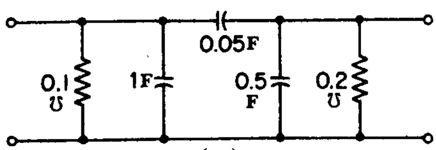
$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{Y}^{a}(s)+\mathbf{Y}^{b}(s) \qquad (۵۲-۱۰)$$

از این رابطه در می‌یابیم که با موازی شدن دو شبکه دو قطبی، پارامترهای ادمیتانسی متناظر این دو شبکه با هم جمع می‌گردند.

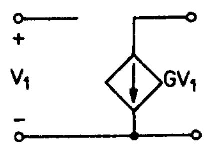
مثال (۱۰-۶): شکل (۱۰-۲۱- الف) یک شبکه دو قطبی را نشان می‌دهد که می‌توان این شبکه را به‌صورت حالت موازی دو شبکه ارائه‌شده در شکل‌های (۱۰-۲۱- ب) و (۱۰-۲۱- ج) در نظر گرفت. با استفاده از خواص شبکه‌های دو قطبی موازی، ماتریس ادمیتانس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۱- الف) را محاسبه نمایید.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۱۰-۲۱): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۶) به همراه اتصال موازی دو شبکه مجزا

حل: با استفاده از قانون جریان KCL برای دو گره شبکه دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۲۱- ب) ماتریس ادمیتانس آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{Y}^{a}(s)=\begin{bmatrix} ۱/۰۵s+۰/۱ & -۰/۰۵s \\ -۰/۰۵s & ۰/۵۵s+۰/۲ \end{bmatrix}$$

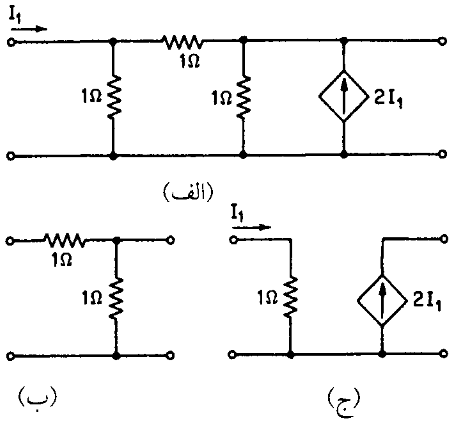
همچنین برای شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۱- ج) خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}^b(s)=\begin{bmatrix} o & o \\ G & o \end{bmatrix}$$

در نتیجه، با توجه به موازی شدن دو شبکه A و B ، ماتریس ادمیتانسی شبکه شکل (۱۰-۲۱- الف) را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{Y}^a(s)+\mathbf{Y}^b(s)=\begin{bmatrix} ۱/۰۵s+۰/۱ & -۰/۰۵s \\ -۰/۰۵s+G & ۰/۵۵s+۰/۲ \end{bmatrix}$$

تمرین (۱۰-۶): در شکل (۱۰-۲۲- الف)، با استفاده از ماتریس ادمیتانس شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل‌های (۱۰-۲۲- ب و ج) و موازی کردن این دو شبکه، ماتریس ادمیتانس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۲- الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۲۲): شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۶) به همراه اتصال موازی دو شبکه مجزا

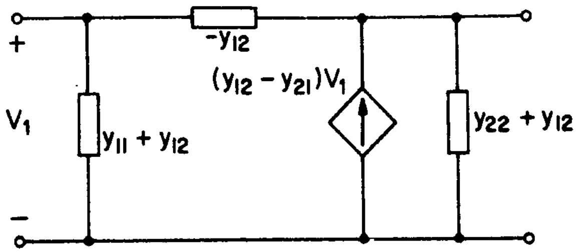
جواب: $Y(s)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۱۰-۹- مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی

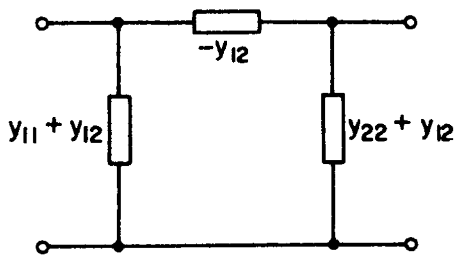
در بخش (۱۰-۶)، مدل **T** را برای نمایش یک شبکه دو قطبی با استفاده از پارامترهای **z** شبکه بیان نمودیم. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از پارامترهای **y** یک شبکه دو قطبی، مدل دیگری به‌نام مدل **Π** را برای آن ارائه کنیم. برای رسیدن به این هدف، ابتدا روابط اساسی یک شبکه دو قطبی را براساس پارامترهای **y** دوباره بازنویسی می‌کنیم:

$$I_۱(s)=y_{۱۱}(s)\cdot V_۱(s)+y_{۱۲}(s)\cdot V_۲(s)$$
$$I_۲(s)=y_{۲۱}(s)\cdot V_۱(s)+y_{۲۲}(s)\cdot V_۲(s)$$

حال اگر بخواهیم این روابط را به‌صورت یک مدار الکتریکی معادل شکل **Π** نشان دهیم، می‌توان به‌شکل (۱۰-۲۳) مراجعه نمود که از سه ادمیتانس و یک منبع جریان وابسته تشکیل شده است. معادلات این شبکه، دقیقاً مطابق با معادلات فوق می‌باشد.حال اگر شبکه به‌صورت یک شبکه دو قطبی متقابل باشد، آنگاه با شرط $y_{۱۲}(s) = y_{۲۱}(s)$ ، منبع جریان وابسته حذف شده و شکل (۱۰-۲۳) به‌شکل (۱۰-۲۴) تبدیل می‌شود. این وضعیت در مواقعی اتفاق می‌افتد که شبکه موردنظر، از عناصر سلف، خازن و مقاومت تشکیل شده باشد.



شکل (۱۰-۲۳): مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی



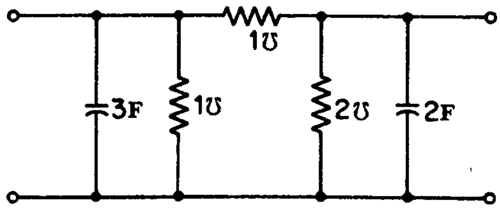
شکل (۱۰-۲۴): مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی با$y_{۱۲}(s)=y_{۲۱}(s)$

مثال (۱۰-۷): ماتریس ادمیتانس یک شبکه دو قطبی به‌قرار زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} ۳s+۲ & -۱ \\ -۱ & ۲s+۳ \end{bmatrix}$$

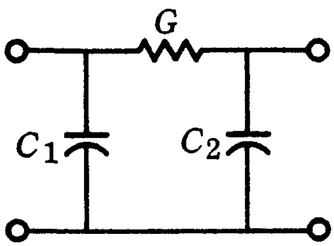
حال عناصر شبکه دو قطبی موردنظر را رسم کنید.

حل: با توجه به آنکه در ماتریس ادمیتانس ارائه شده، شرط $y_{۱۲}(s) = y_{۲۱}(s)$ برقرار می‌باشد لذا شبکه به‌صورت یک شبکه متقابل خواهد بود که مدل **Π** آن به‌صورت شکل (۱۰-۲۴) خواهد بود که در شکل (۱۰-۲۵) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۲۵): مدل Π شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۷)

تمرین (۱۰-۷): برای مدل **Π** شبکه دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۲۶)، ماتریس ادمیتانس شبکه مذکور را بیابید.



شکل (۱۰-۲۶): مدل Π شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۷)

جواب:
$$\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix} sC_1+\frac{1}{R} & \frac{-1}{R} \\ \frac{-1}{R} & sC_2+\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

۱۰-۱۰- مدل شبکه‌های دو قطبی با پارامترهای هایبرید

در بخش‌های قبلی، ماتریس امپدانسی **Z** و ماتریس ادمیتانسی **Y** را بیان نمودیم که بترتیب بیانگر حالت‌های اول و دوم از جدول (۱۰-۱) می‌باشند. در ماتریس امپدانس، جریان‌های $I_1(s)$ و $I_2(s)$ به‌عنوان متغیرهای مستقل، و ولتاژهای $V_1(s)$ و $V_2(s)$ به‌عنوان متغیرهای وابسته بودند. این در حالی است که در ماتریس ادمیتانس، متغیرهای $V_1(s)$ و $V_2(s)$ به‌عنوان متغیرهای مستقل، و متغیرهای $I_1(s)$ و $I_2(s)$ متغیرهای وابسته بودند. در این بخش می‌خواهیم حالت سوم و چهارم از جدول (۱۰-۱) را بیان کنیم که در این دو حالت، متغیرهای مستقل، ترکیبی از جریان و ولتاژ قطب‌های خروجی و ورودی می‌باشند.

۱۰-۱۰-۱- ماتریس هایبرید G

هنگامی که ولتاژ یک قطب و جریان قطب دیگر به‌عنوان متغیرهای مستقل انتخاب گردند، ماتریس هایبرید[1] توصیف می‌گردد. در صورتی که این متغیرهای مستقل، متغیرهای $V_۱(s)$ و $I_۲(s)$ باشند، آنگاه با استفاده از قضیه جمع‌آثار، دو متغیر وابسته $V_۲(s)$ و $I_۱(s)$ را می‌توان به‌شکل زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} I_۱(s) &= g_{۱۱}(s)\cdot V_۱(s) + g_{۱۲}(s)\cdot I_۲(s) \\ V_۲(s) &= g_{۲۱}(s)\cdot V_۱(s) + g_{۲۲}(s)\cdot I_۲(s) \end{aligned} \qquad (۱۰-۵۳)$$

این وضعیت، حالت سوم از جدول (۱-۱۰) را مشخص می‌کند. در صورتی که دسته معادلات اخیر را به‌صورت ماتریسی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} I_۱(s) \\ V_۲(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{۱۱}(s) & g_{۱۲}(s) \\ g_{۲۱}(s) & g_{۲۲}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_۱(s) \\ I_۲(s) \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۵۴)$$

ماتریس **G** به‌عنوان ماتریس هایبرید، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{۱۱}(s) & g_{۱۲}(s) \\ g_{۲۱}(s) & g_{۲۲}(s) \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۵۵)$$

به دست آوردن تعبیرهای فیزیکی پارامترهای g_{ij} مانند حالت‌های امپدانس و ادمیتانس، بسیار راحت است. در روابط زیر، این تعبیرهای فیزیکی به‌همراه ارتباط آنان با اعضاء ماتریس امپدانس و ادمیتانس بیان شده است:

$$g_{۱۱}(s) = \left.\frac{I_۱(s)}{V_۱(s)}\right|_{I_۲(s)=o} = \frac{۱}{z_{۱۱}(s)} \qquad (۱۰-۵۶)$$

$$g_{۱۲}(s) = \left.\frac{I_۱(s)}{I_۲(s)}\right|_{V_۱(s)=o} = \frac{y_{۱۲}(s)}{y_{۲۲}(s)} \qquad (۱۰-۵۷)$$

$$g_{۲۱}(s) = \left.\frac{V_۲(s)}{V_۱(s)}\right|_{I_۲(s)=o} = \frac{Z_{۲۱}(s)}{Z_{۱۱}(s)} \qquad (۱۰-۵۸)$$

$$g_{۲۲}(s) = \left.\frac{V_۲(s)}{I_۲(s)}\right|_{V_۱(s)=o} = \frac{۱}{y_{۲۲}(s)} \qquad (۱۰-۵۹)$$

لازم به‌ذکر است که $g_{۱۱}(s)$ دارای بعد ادمیتانس، $g_{۱۲}(s)$ نسبت انتقال جریان معکوس، $g_{۲۱}(s)$ نسبت انتقال ولتاژ مستقیم، و $g_{۲۲}(s)$ دارای بعد امپدانس است. در شکل (۱۰-۲۷) نحوه محاسبه فیزیکی این پارامترها نشان داده شده است. براساس روابط

---
[1]- Hybrid Matrix

(۱۰-۵۶) تا (۱۰-۵۹)، پارامترهای $g_{۱۱}(s)$ تا $g_{۲۲}(s)$ را می‌توان برحسب پارامترهای ماتریس ادمیتانس به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} g_{۱۱}(s) & g_{۱۲}(s) \\ g_{۲۱}(s) & g_{۲۲}(s) \end{bmatrix} = \frac{۱}{y_{۲۲}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \det \mathbf{Y}(s) & y_{۱۲}(s) \\ -y_{۲۱}(s) & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۶۰)$$

همچنین به‌راحتی می‌توان نشان داد که،

$$\begin{bmatrix} y_{۱۱}(s) & y_{۱۲}(s) \\ y_{۲۱}(s) & y_{۲۲}(s) \end{bmatrix} = \frac{۱}{g_{۲۲}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \det \mathbf{G}(s) & g_{۱۲}(s) \\ -g_{۲۱}(s) & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۶۱)$$

که در این رابطه $\det \mathbf{G}(s) = g_{۱۱}(s) \cdot g_{۲۲}(s) - g_{۱۲}(s) \cdot g_{۲۱}(s)$ می‌باشد.

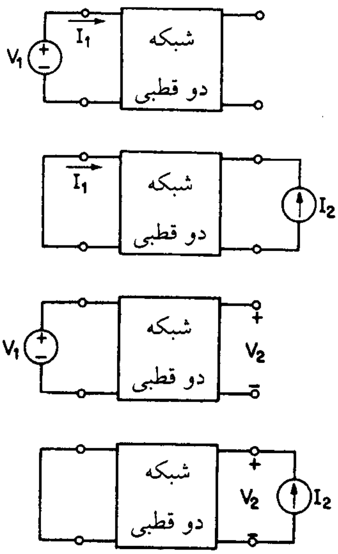
لازم به‌ذکر است که با توجه به رابطه (۱۰-۶۰) در می‌یابیم که برای یافتن ماتریس انتقال $\mathbf{G}$، حتماً باید $y_{۲۲}(s) \neq o$ باشد؛ به‌عبارت دیگر، در صورتی که ساختار شبکه دو قطبی به‌گونه‌ای باشد که $y_{۲۲}(s) = o$ باشد، آنگاه امکان بیان ماتریس $\mathbf{G}(s)$ برای دو قطبی مذکور وجود ندارد. عکس این موضوع هم صادق است که از رابطه (۱۰-۶۱) قابل مشاهده است.

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$$

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}$$



شکل (۱۰-۲۷): محاسبه فیزیکی پارامترهای ماتریس G

نوع دوم از ماتریس‌های هایبرید که بیانگر حالت چهارم از جدول (۱۰-۱) می‌باشد، آن است که متغیرهای $I_۱(s)$ و $V_۲(s)$ به‌عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای $V_۱(s)$ و $I_۲(s)$ به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شوند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$V_1(s) = h_{11}(s)\cdot I_1(s) + h_{12}(s)\cdot V_2(s)$$
$$I_2(s) = h_{21}(s)\cdot I_1(s) + h_{22}(s)\cdot V_2(s) \qquad (۶۲-۱۰)$$

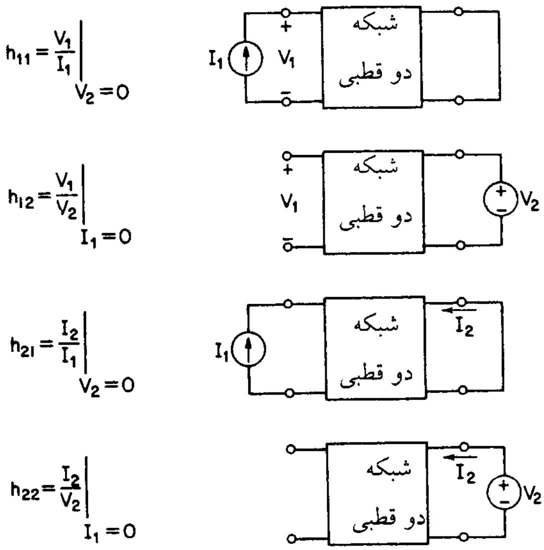
که اگر دسته معادلات اخیر را به‌شکل ماتریسی بنویسیم داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \qquad (۶۳-۱۰)$$

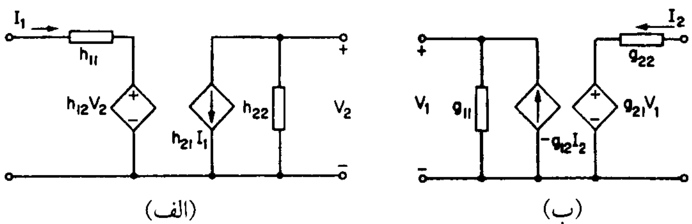
که به ماتریس $\mathbf{H}$ ، ماتریس با پارامترهای $\boldsymbol{h}$ می‌گویند. به‌راحتی می‌توان نشان داد که،

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1} \quad , \quad \mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1} \qquad (۶۴-۱۰)$$

نحوه محاسبه پارامترهای $\boldsymbol{h}$ در شکل (۱۰-۲۸) قابل مشاهده است. همچنین مدار معادل ماتریس‌های $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ بر پایه منابع کنترل‌شده در شکل (۱۰-۲۹) نشان داده شده است.

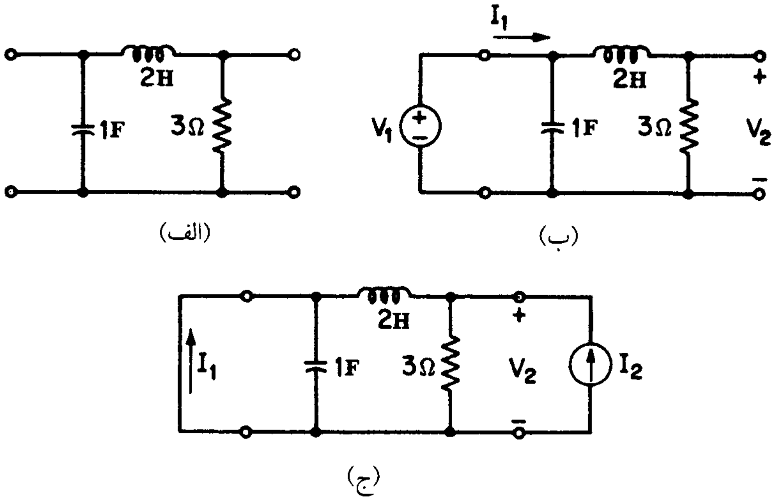


شکل (۱۰-۲۸): محاسبه فیزیکی پارامترهای ماتریس H



شکل (۱۰-۲۹): مدار معادل یک شبکه دو قطبی: الف) برحسب پارامترهای G ؛ ب) برحسب پارامترهای H

مثال (۱۰-۸): برای مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۰- الف)، پارامترهای ماتریس **G** را بیابید.



شکل (۱۰-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۸)

حل: برای یافتن پارامترهای $g_{11}(s)$ و $g_{21}(s)$ از شبکه (۱۰-۳۰- ب) استفاده می‌شود؛ زیرا در محاسبه این پارامترها فرض می‌شود که $I_2(s)=0$ می‌باشد. در این شبکه، با تزریق یک منبع ولتاژ به قطب ورودی (یعنی $V_1(s)$)، مقادیر $I_1(s)$ و $V_2(s)$ محاسبه می‌شود. در نتیجه، به‌راحتی می‌توان محاسبه نمود که،

$$g_{11}(s)=\frac{I(s)}{V_1(s)}=\frac{2s^2+3s+1}{2s+3}$$

$$g_{21}(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{3}{2s+3}$$

همچنین برای محاسبه $g_{12}(s)$ و $g_{22}(s)$ از مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۰- ج) استفاده می‌شود که با استفاده از روش محاسبه مدارهای الکتریکی خواهیم داشت:

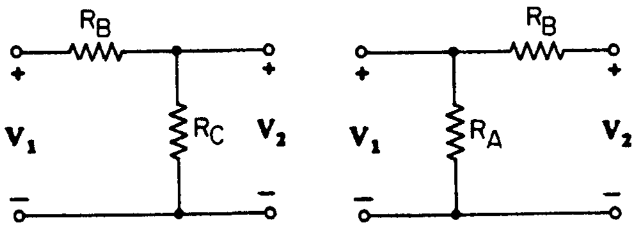
$$g_{12}(s)=\frac{-3}{2s+3}$$

$$g_{22}(s)=\frac{6s}{2s+3}$$

در نتیجه، ماتریس $\mathbf{G}(s)$ به‌شکل زیر تکمیل می‌گردد:

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\frac{۲s^{۲}+۳s+۱}{۲s+۳} & \frac{-۳}{۲s+۳}\\ \frac{۳}{۲s+۳} & \frac{۶s}{۲s+۳}\end{bmatrix}$$

تمرین (۱۰-۸): برای مدارهای الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۱) ماتریس هایبرید **H** را بیابید.



(الف) (ب)

شکل (۱۰-۳۱): مدارهای الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۸)

جواب: الف) $\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix}\frac{R_AR_B}{R_A+R_B} & \frac{R_A}{R_A+R_B}\\ \frac{-R_A}{R_A+R_B} & \frac{۱}{R_A+R_B}\end{bmatrix}$ ب) $\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix}R_B & ۱\\ -۱ & \frac{۱}{R_c}\end{bmatrix}$

۱۰-۱۱- مدل شبکه‌های دو قطبی با پارامترهای انتقال

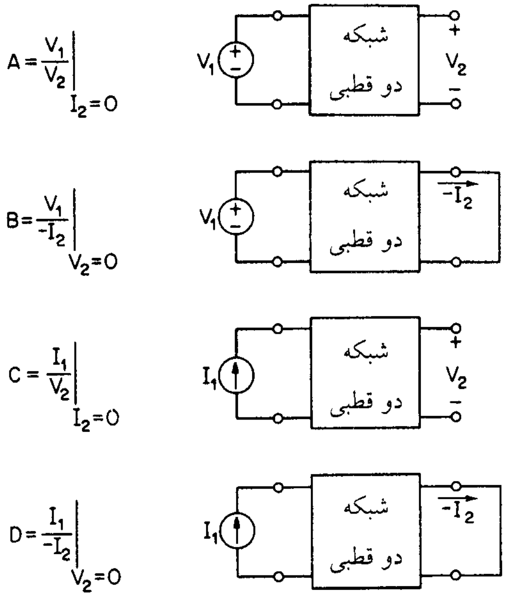
دو دسته دیگر از پارامترهای قراردادی یک شبکه دو قطبی، پارامترهای انتقال می‌باشند که حالت‌های پنجم و ششم از مجموعه شش حالت ارائه‌شده در جدول (۱۰-۱) می‌باشند. در حالت پنجم، متغیرهای قطب خروجی $V_۲(s)$ و $-I_۲(s)$، به‌عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای قطب ورودی به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته می‌شوند. یعنی،

$$\begin{bmatrix}V_۱(s)\\ I_۱(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(s) & B(s)\\ C(s) & D(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_۲(s)\\ -I_۲(s)\end{bmatrix} \qquad (۱۰-۶۵)$$

ماتریس انتقال **T** با پارامترهای ABCD به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}A(s) & B(s)\\ C(s) & D(s)\end{bmatrix} \qquad (۱۰-۶۶)$$

لازم به‌ذکر است، با به‌کار بردن علامت منفی برای جریان $I_{۲}(s)$ در رابطه (۱۰-۶۵)، جریانی که در قطب خروجی از آن قطب خارج می‌شود، به‌عنوان جریان مثبت در نظرگرفته می‌شود. پارامترهای A ، B ، C و D به‌سادگی با پارامترهای امپدانس مدار باز و ادمیتانس مدار اتصال کوتاه مربوط می‌شوند که نحوه محاسبه آنان در شکل (۱۰-۳۲) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۳۲): نحوه محاسبه پارامترهای انتقال *t*

در حالت ششم از جدول (۱۰-۱)، متغیرهای قطب ورودی به‌عنوان متغیرهای مستقل، و متغیرهای قطب خروجی به‌عنوان متغیرهای وابسته هستند. یعنی،

$$\begin{bmatrix} V_{۲}(s) \\ -I_{۲}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'(s) & B'(s) \\ C'(s) & D'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{۱}(s) \\ I_{۱}(s) \end{bmatrix} \qquad (۶۷-۱۰)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۰-۶۵) و (۱۰-۶۷) در می‌یابیم که،

$$\mathbf{T}' \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} \qquad (۶۸-۱۰)$$

کاربرد عمده ماتریس انتقال، در پشت سر هم وصل کردن[1] دو قطبی‌ها مثل شکل (۱۰-۳۳) می‌باشد. فرض کنید که ماتریس‌های انتقال دو قطبی‌های **A** و **B** به شکل زیر بیان شوند که

[1]- Cascade Connection

پارامترهای شبکه **A** با پارامترهای $A^a(s)$ ، $B^a(s)$ ، $C^a(s)$ ، و $D^a(s)$ مشخص شوند و شبکه **B** با پارامترهای $A^b(s)$ ، $B^b(s)$ ، $C^b(s)$ ، و $D^b(s)$ مشخص گردند:

$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^a(s) \\ -I_2^a(s) \end{bmatrix} \tag{۶۹-۱۰}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ I_1^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \tag{۷۰-۱۰}$$

حال اگر قطب خروجی شبکه دو قطبی **A** به قطب ورودی شبکه دو قطبی **B** مطابق شکل (۱۰-۳۳) متصل شوند، آنگاه از ترکیب دو رابطه (۱۰-۶۹) و (۱۰-۷۰) می‌توان به ماتریس انتقال جدیدی رسید که از حاصل ضرب دو ماتریس انتقال **A** و B حاصل می‌شود،

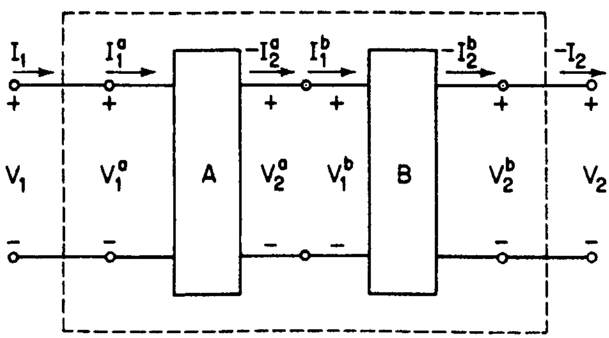
$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \tag{۷۱-۱۰}$$

در نهایت، اگر مشخصات شبکه دو قطبی منتجه را با مشخصات ورودی $V_1(s)$ و $I_1(s)$ و مشخصات خروجی $V_2(s)$ و $I_2(s)$ بیان کنیم آنگاه مشخصه شبکه دو قطبی منتجه برابر خواهد بود با:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \tag{۷۲-۱۰}$$

که،

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \tag{۷۳-۱۰}$$



شکل (۱۰-۳۳): اتصال پشت سر هم دو شبکه دو قطبی

بنابراین، ماتریس انتقال منتجه دو شبکه دو قطبی که پشت سر هم، به هم متصل شده‌اند، از حاصل ضرب ماتریس‌های انتقال جداگانه آن دو قطبی‌ها حاصل می‌شود. سودمندی بسیار زیاد ماتریس انتقال، معلول همین خاصیت اخیر است. از این خاصیت در طرح سیستم‌های تلفنی، شبکه‌های مایکروویو، رادارها و ... استفاده می‌شود.

لازم به‌ذکر است که بعضی از شبکه‌های دو قطبی، قسمت‌هایی از نمایش‌های ویژه یک شبکه دو قطبی را ندارند. به‌عنوان مثال، شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۳۴- الف) دارای نمایش ماتریس امپدانسی نیست. در واقع، تمام عناصر z_{ij} ، بینهایت هستند؛ لیکن این دو قطبی دارای ماتریس ادمیتانس می‌باشد که به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix} z^{-1} & -z^{-1} \\ -z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۷۴-۱۰)$$

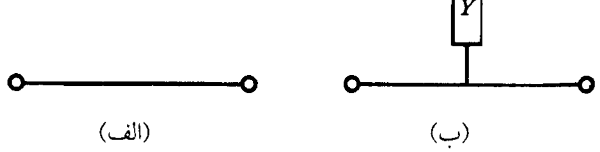
همچنین این شبکه دارای ماتریس انتقال به‌صورت زیر خواهد بود که از روابط ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۲) به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & z(s) \\ o & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷۵-۱۰)$$

راه دیگر درک این موضوع که شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۴- الف) دارای ماتریس امپدانس $\mathbf{Z}$ نمی‌باشد آن است که $\det \mathbf{Y}(s)=o$ می‌باشد. لذا ماتریس ادمیتانس $\mathbf{Y}$ این شبکه دو قطبی، یک ماتریس ویژه مطابق رابطه (۱۰-۷۴) می‌باشد و از این رو، عکس ماتریس $\mathbf{Y}$ وجود ندارد؛ یعنی ماتریس $\mathbf{Z}$ برای این شبکه معنی نخواهد داشت.

حال اگر شبکه دو قطبی مشخص‌شده در شکل (۱۰-۳۴- ب) را مشاهده کنیم، می‌بینیم که برعکس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۳۴- الف)، این شبکه دارای نمایش ماتریس ادمیتانس $\mathbf{Y}$ نبوده و لیکن، دارای ماتریس امپدانس به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix} y^{-1} & y^{-1} \\ y^{-1} & y^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۷۶-۱۰)$$

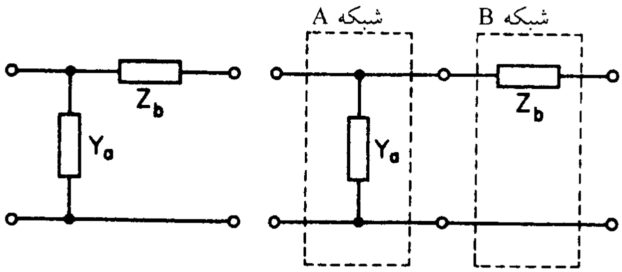


شکل (۱۰-۳۴): مثال‌هایی از شبکه‌های دو قطبی که نمایش یکی از ماتریس‌های Y یا Z را ندارند

همچنین این شبکه دارای ماتریس انتقال به‌صورت زیر خواهد بود که از روابط ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۲) محاسبه می‌گردند.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & o \\ y(s) & o \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۷۷)$$

مثال (۱۰-۹): برای شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۵- الف)، ماتریس انتقال **T** را با استفاده از ماتریس‌های پشت سر هم بیابید.

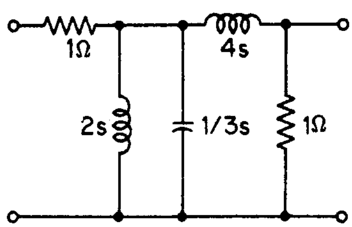


شکل (۱۰-۳۵): یک شبکه دو قطبی با دو عنصر Y_a و Z_a

حل: مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۵- الف) را می‌توان به دو شبکه **A** و **B** به‌صورت شکل (۱۰-۳۵- ب) تقسیم نمود. ماتریس انتقال شبکه **A** را از رابطه (۱۰-۷۷) و ماتریس انتقال شبکه **B** را از رابطه (۱۰-۷۵) جایگزین می‌کنیم. لذا چون این دو شبکه به‌صورت پشت سر هم متصل شده‌اند، پس ماتریس انتقال شبکه منتجه، برابر است با:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & o \\ Y_a(s) & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & Z_b(s) \\ o & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & Z_b(s) \\ Y_a(s) & 1+Y_a(s)Z_b(s) \end{bmatrix}$$

مثال (۱۰-۱۰): در مدار الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۱۰-۳۶)، با استفاده از ماتریس‌های انتقال روابط (۱۰-۷۵) و (۱۰-۷۷)، ماتریس انتقال شبکه را به‌دست آورید.



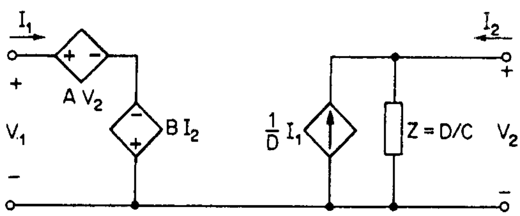
شکل (۱۰-۳۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۱۰)

حل: شبکه مذکور را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. شبکه اول از امپدانس سری $Z = 1\Omega$ ، شبکه دوم از امپدانس موازی $2s$ و $\frac{1}{3s}$ ، شبکه سوم از امپدانس سری $4s$ ، و شبکه چهارم از امپدانس موازی 1Ω تشکیل شده است. ماتریس انتقال شبکه‌های اول و سوم از رابطه (۱۰-۷۵) و ماتریس انتقال شبکه‌های دوم و چهارم از رابطه (۱۰-۷۷) به‌دست می‌آیند. با ضرب ماتریس‌های انتقال این چهار شبکه، ماتریس انتقال منتجه برابر است با:

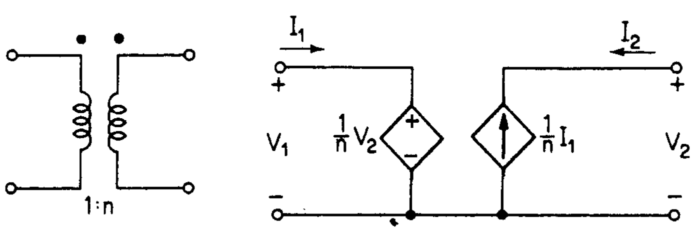
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{6s^2+1}{2s} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{24s^3+14s^2+8s+1}{2s} & \dfrac{24s^3+8s^2+6s}{2s} \\ \dfrac{24s^3+6s^2+6s+1}{2s} & \dfrac{24s^3+6s}{2s} \end{bmatrix}$$

در انتهای این بخش می‌خواهیم ماتریس انتقال یک شبکه دو قطبی را به‌وسیله منابع کنترل‌شده و یک امپدانس مطابق شکل (۱۰-۳۷) نشان دهیم. با به‌کار بردن قوانین KVL در قطب ورودی و قوانین KCL در قطب خروجی، می‌توان به روابط اساسی ارائه‌شده در معادله (۱۰-۶۵) رسید. براساس همین شکل، می‌توان با نوشتن روابط یک ترانسفورماتور ایده‌ال ($I_1(s) = -\frac{1}{n} I_2(s)$, $V_2(s) = nV_1(s)$)، مدل یک ترانسفورماتور ایده‌ال را به‌صورت یک دو قطبی مطابق شکل (۱۰-۳۸) نمایش داد.

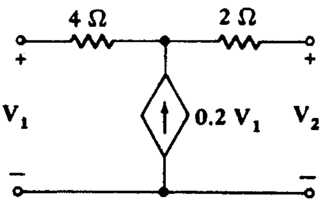


شکل (۱۰-۳۷): مدل یک شبکه دو قطبی براساس ماتریس انتقال و منابع کنترل شده



شکل (۱۰-۳۸): مدل یک ترانسفورماتور ایده‌ال با منابع کنترل شده

تمرین (۱۰-۹): ماتریس انتقال شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۹) را بیابید.



شکل (۱۰-۳۹): شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۹)

جواب: $\mathbf{T}=\begin{bmatrix} ۰/۵۵۶ & ۳/۳۳ \\ -۰/۱۱۱۱ & ۰/۳۳۳ \end{bmatrix}$

۱۰-۱۲- کاربردهایی از پارامترهای شبکه‌های دو قطبی

در بسیاری از کاربردهای عملی، یک شبکه دو قطبی از یک طرف (طرف قطب ورودی) به یک مولد و از طرف دیگر (طرف قطب خروجی) به یک بار مصرفی متصل می‌شود که در شکل (۱۰-۴۰) نشان داده شده است. در حالت کلی، این مولد به‌وسیله یک منبع ولتاژ $V_S(s)$ و یک امپدانس $Z_S(s)$ نمایش داده می‌شود و یک بار هم به‌صورت یک امپدانس $Z_L(s)$ بیان می‌شود. در این کاربرد به دنبال آن هستیم که اولاً امپدانس نقطه تحریک در قطب ورودی یعنی $Z_i(s)=\dfrac{V_1(s)}{I_1(s)}$ و خواص انتقال کلی دو قطبی با بار مصرفی، یعنی رابطه میان ولتاژ خروجی $V_2(s)$ با $V_S(s)$ را بیابیم. برای این منظور، فرض کنید که پارامترهای امپدانس مدار باز دو قطبی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V_1(s)&=z_{11}(s)\cdot I_1(s)+z_{12}(s)\cdot I_2(s)\\ V_2(s)&=z_{21}(s)\cdot I_1(s)+z_{22}(s)\cdot I_2(s)\end{aligned} \qquad (۱۰-۷۸)$$

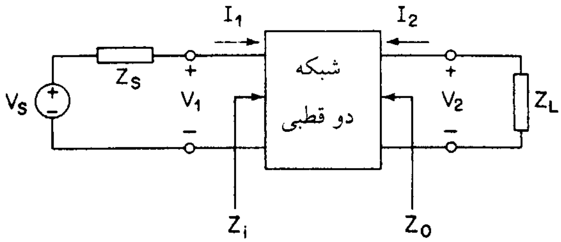
حال بار الکتریکی متصل شده و منبع ورودی، محدودیت‌هایی را به مشخصات قطب‌های ورودی و خروجی شبکه دو قطبی تحمیل می‌کند که این محدودیت‌ها برابرند با:

$$V_1(s)=V_S(s)-Z_S(s)\cdot I_1(s) \qquad (۱۰-۷۹)$$

$$V_2(s)=-Z_L(s)\cdot I_2(s) \qquad (۱۰-۸۰)$$

اکنون برای دستیابی به $\dfrac{V_1(s)}{I_1(s)}=Z_i(s)$ کافی است که از روابط اخیر، متغیرهای $I_2(s)$ و $V_2(s)$ حذف گردند.

$$z_i(s)=\frac{V_1(s)}{I_1(s)}=z_{11}(s)-\frac{z_{12}(s)z_{21}(s)}{z_{22}(s)+Z_L(s)} \qquad (۱۰-۸۱)$$



شکل (۱۰-۴۰): یک شبکه دو قطبی با اتصال منبع و بار به آن

بعلاوه اگر بخواهیم $Z_i(s)$ را با استفاده از پارامترهای ادمیتانسی اتصال کوتاه شبکه دو قطبی محاسبه نماییم، می‌دانیم که،

$$I_1(s) = y_{11}(s)\cdot V_1(s) + y_{12}(s)\cdot V_2(s) \tag{۱۰-۸۲}$$

و با جایگزینی رابطه (۱۰-۸۰) در رابطه (۱۰-۸۲) داریم:

$$\frac{1}{Z_i(s)} = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = y_{11}(s) - \frac{y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s) + \frac{1}{Z_L(s)}} \tag{۱۰-۸۳}$$

و یا،

$$Z_i(s) = \frac{y_{22}(s) + Y_L(s)}{\det Y(s) + y_{11}(s)Y_L(s)} \tag{۱۰-۸۴}$$

در این رابطه، $Y_L(s) = {1}/{Z_L(s)}$ و $\det Y_L(s)$ دترمینان ماتریس ادمیتانس است.

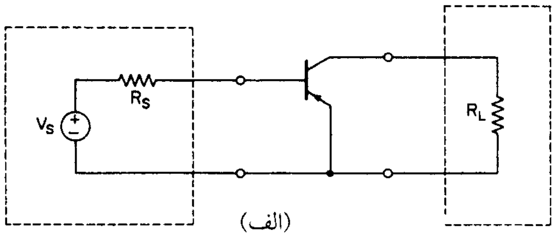
در کاربرد دیگر، اگر بخواهیم نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2(s)}{V_s(s)}$ را بیابیم، کافی است که در معادلات (۱۰-۷۸)، (۱۰-۷۹) و (۱۰-۸۰)، متغیرهای $I_1(s)$ ، $V_1(s)$ ، و $I_2(s)$ حذف گردند. با انجام این کار، به این نتیجه می‌رسیم که،

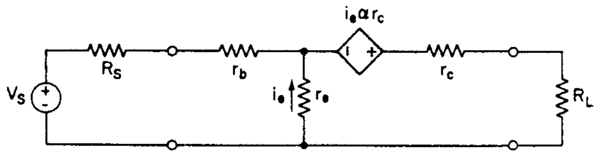
$$\frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{z_{21}(s).Z_L(s)}{[z_{11}(s) + Z_s(s)][z_{22}(s) + Z_L(s)] - z_{12}(s).z_{21}(s)} \tag{۱۰-۸۵}$$

بنابراین با داشتن پارامترهای امپدانس مدار باز یک دو قطبی، امپدانس‌های منبع و بار مصرفی آن، می‌توان امپدانس نقطه تحریک $Z_i(s)$ و نسبت انتقال ولتاژ کلی $\frac{V_2(s)}{V_s(s)}$ را بترتیب از روابط (۱۰-۸۱ و ۸۴) و (۱۰-۸۵) محاسبه نمود.

مثال (۱۰-۱۱): در شکل (۱۰-۴۱- الف) یک مدار ترانزیستوری نشان داده است که از قطب ورودی به یک منبع، و از قطب خروجی به یک بار مقاومتی R_L متصل شده است.

مدل **T** یک مدار ترانزیستوری مطابق شکل (۱۰-۴۱- ب) می‌باشد که پارامترهای **Z** آن به‌صورت زیر می‌باشد.





شکل (۱۰-۴۱): یک مدار ساده ترانزیستوری مربوط به مثال (۱۰-۱۱)

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} r_e + r_b & r_e \\ r_e - \alpha.r_c & r_e + r_c(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

در این مدار، مطلوبست امپدانس نقطه تحریک دو قطبی و نسبت انتقال ولتاژ کلی سیستم.

حل: با استفاده از رابطه (۱۰-۸۱) مقدار امپدانس نقطه تحریک برابر است با:

$$Z_i(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = r_e + r_b - \frac{r_e(r_e - \alpha.r_c)}{r_e + r_c(1-\alpha) + R_L}$$

همچنین نسبت انتقال ولتاژ کلی با استفاده از رابطه (۱۰-۸۵) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{r_e(r_e - \alpha.r_c)R_L}{(r_e + r_b + R_L)(r_e + r_c(1-\alpha) + R_L) - r_e(r_e - \alpha.r_c)}$$

در انتهای این فصل، برای اینکه ارتباط پارامترهای ماتریس امپدانس **Z** ، ماتریس ادمیتانس **Y** ، ماتریس‌های هایبرید **G** و **H** ، و ماتریس‌های انتقال **T** و **T'** را به‌شکل وضوحی بیان کنیم، این روابط را به‌طور یکجا و خلاصه در جدول (۱۰-۲) آورده شده است. واضح است که ماتریس‌های هر ردیف، با هم یکی می‌باشند و برای تبدیل بین این ماتریس‌ها و پارامترهای آنها، می‌توان از روابط این جدول استفاده نمود.

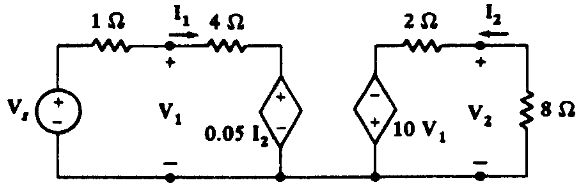
جدول (۱۰-۲): ارتباط بین پارامترهای ماتریس‌های مختلف دو قطبی‌ها

	Z	Y	G
Z	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\det \mathbf{Y}} & -\frac{y_{12}}{\det \mathbf{Y}} \\ -\frac{y_{21}}{\det \mathbf{Y}} & \frac{y_{11}}{\det \mathbf{Y}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\det \mathbf{G}}{g_{11}} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\det \mathbf{Z}} & -\frac{z_{12}}{\det \mathbf{Z}} \\ -\frac{z_{21}}{\det \mathbf{Z}} & \frac{z_{11}}{\det \mathbf{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{z_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{Y}}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{Z}}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\det \mathbf{Y}}{y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{g_{22}}{\det \mathbf{G}} & -\frac{g_{12}}{\det \mathbf{G}} \\ -\frac{g_{21}}{\det \mathbf{G}} & \frac{g_{11}}{\det \mathbf{G}} \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\det \mathbf{Y}}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\det \mathbf{G}}{g_{21}} \end{bmatrix}$
T'	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & -\frac{\det \mathbf{Z}}{z_{12}} \\ \frac{-1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & \frac{1}{y_{12}} \\ \frac{\det \mathbf{Y}}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\det \mathbf{G}}{g_{12}} & \frac{g_{22}}{g_{12}} \\ \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \end{bmatrix}$

ادامه جدول (۱۰-۲): ارتباط بین پارامترهای ماتریس‌های مختلف دو قطبی‌ها

	H	T	T'
Z	$\begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{H}}{h_{۲۲}} & \frac{h_{۱۲}}{h_{۲۲}} \\ -\frac{h_{۲۱}}{h_{۲۲}} & \frac{۱}{h_{۲۲}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\det \mathbf{A}}{C} \\ \frac{۱}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D'}{C'} & \frac{۱}{C'} \\ \frac{\det \mathbf{A}'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{۱}{h_{۱۱}} & -\frac{h_{۱۲}}{h_{۱۱}} \\ \frac{h_{۲۱}}{h_{۱۱}} & \frac{\det \mathbf{H}}{h_{۱۱}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\det \mathbf{A}}{B} \\ -\frac{۱}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{۱}{B'} \\ -\frac{\det \mathbf{A}'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} \frac{h_{۲۲}}{\det \mathbf{H}} & -\frac{h_{۱۲}}{\det \mathbf{H}} \\ -\frac{h_{۲۱}}{\det \mathbf{H}} & \frac{h_{۱۱}}{\det \mathbf{H}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{C}{A} & -\frac{\det \mathbf{A}}{A} \\ \frac{۱}{A} & \frac{B}{A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{۱}{D'} \\ \frac{\det \mathbf{A}'}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} h_{۱۱} & h_{۱۲} \\ h_{۲۱} & h_{۲۲} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\det \mathbf{A}}{D} \\ -\frac{۱}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B'}{A'} & \frac{۱}{A'} \\ \frac{\det \mathbf{A}'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} -\frac{\det \mathbf{H}}{h_{۲۱}} & -\frac{h_{۱۱}}{h_{۲۱}} \\ -\frac{h_{۲۲}}{h_{۲۱}} & -\frac{۱}{h_{۲۱}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D'}{\det \mathbf{T}'} & \frac{-B'}{\det \mathbf{T}'} \\ \frac{-C'}{\det \mathbf{T}'} & \frac{A'}{\det \mathbf{T}'} \end{bmatrix}$
T'	$\begin{bmatrix} \frac{۱}{h_{۱۲}} & \frac{-h_{۱۱}}{h_{۱۲}} \\ \frac{-h_{۲۲}}{h_{۱۲}} & \frac{\det \mathbf{H}}{h_{۱۲}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{\det \mathbf{T}} & \frac{-B}{\det \mathbf{T}} \\ \frac{-C}{\det \mathbf{T}} & \frac{A}{\det \mathbf{T}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$

تمرین (۱۰-۱۰): برای شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۲) که به یک منبع و یک بار 8Ω متصل شده است، مطلوبست: الف) تعیین ماتریس ادمیتانسی **Y** ، ب) مقدار امپدانس دیده‌شده از قطب‌های خروجی شبکه به‌صورت $Z_{out}(s) = \frac{-V_{۲}(s)}{I_{۲}(s)}$.



شکل (۱۰-۴۲): مدار دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۱۰)

جواب: الف) $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} ۰/۱۸۷۵ & -۰/۶۲۵ \\ ۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ؛ ب) $Z_{out}(s)=۱/۹\Omega$

۱۰-۱۳- خلاصه و نتیجه‌گیری

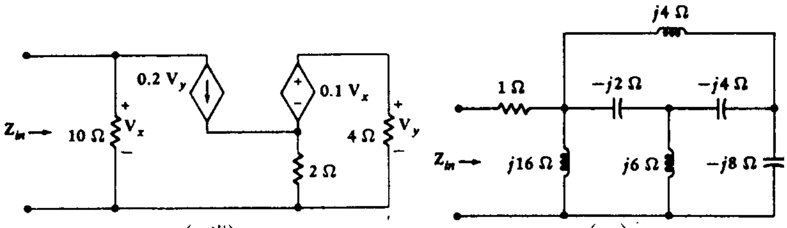
در این فصل، به دنبال تعریف و تحلیل انواع شبکه‌های دو قطبی بودیم. یک شبکه دو قطبی را به‌گونه‌ای تعریف کردیم که از یک قطب ورودی (با دو پایانه ورودی) و یک قطب خروجی (با دو پایانه خروجی) تشکیل شده است. خلاصه و نتیجه‌گیری این شبکه‌های دو قطبی را می‌توان به‌صورت موارد زیر بیان نمود:

- برای ارتباط دادن بین متغیرهای قطب‌های ورودی و خروجی (یعنی متغیرهای $V_۱(s)$ ، $I_۱(s)$ با $V_۲(s)$ و $I_۲(s)$) شش حالت وجود داشت که در جدول (۱۰-۱) به این ۶ حالت اشاره گردید. در حالت اول، شبکه دو قطبی براساس ماتریس با پارامترهای z بیان گردید که به ماتریس امپدانس مدار باز معروف است. در حالت دوم، شبکه دو قطبی به‌وسیله ماتریس ادمیتانس $\mathbf{Y}$ مشخص شد که دارای پارامترهای $\mathbf{y}$ خواهد بود. این ماتریس را نیز ماتریس ادمیتانس مدار اتصال کوتاه نامیدیم. پارامترهای y_{ij} و z_{ij} به‌وسیله رابطه $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^{-۱}$ و $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}^{-۱}$ با یکدیگر ارتباط دارند. لازم به‌ذکر است که برای بیان یک شبکه دو قطبی، عناصر شبکه به‌صورت خطی تغییرناپذیر با زمان خواهند بود.
- حالت سوم وچهارم از نمایش شبکه‌های دو قطبی، براساس ماتریس هایبرید می‌باشد. در این حالت، متغیرهای مستقل، ولتاژ یک قطب و جریان قطب دیگر خواهد بود و بالطبع دو ولتاژ و جریان باقی مانده به‌عنوان متغیرهای وابسته قلمداد می‌شوند. با توجه به گزینه‌های انتخاب متغیرهای مستقل، دو حالت برای ماتریس‌های هایبرید ایجاد می‌شود. این دو ماتریس را به‌صورت ماتریس‌های هایبرید $\mathbf{H}$ و $\mathbf{G}$ بیان نمودیم که روابط $\mathbf{H}=\mathbf{G}^{-۱}$ و $\mathbf{G}=\mathbf{H}^{-۱}$ بین این دو ماتریس برقرار است.
- حالت پنجم و ششم در نمایش شبکه‌های دو قطبی بر اساس ماتریس انتقال می‌باشد. در این حالت، متغیرهای ولتاژ و جریان یک قطب به‌عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای قطب

دیگر به‌عنوان متغیرهای وابسته قلمداد می‌شود. لذا دو حالت وجود دارد: یک حالت آن است که متغیرهای قطب خروجی به‌عنوان متغیرهای مستقل باشند که به این ماتریس انتقال $\mathbf{T}$ گویند و برعکس اگر متغیرهای قطب ورودی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه ماتریس انتقال $\mathbf{T'}$ نامیده می‌شود. بین این دو ماتریس روابط $\mathbf{T}=\mathbf{T'}^{-1}$ و $\mathbf{T'}=\mathbf{T}^{-1}$ برقرار خواهد بود.

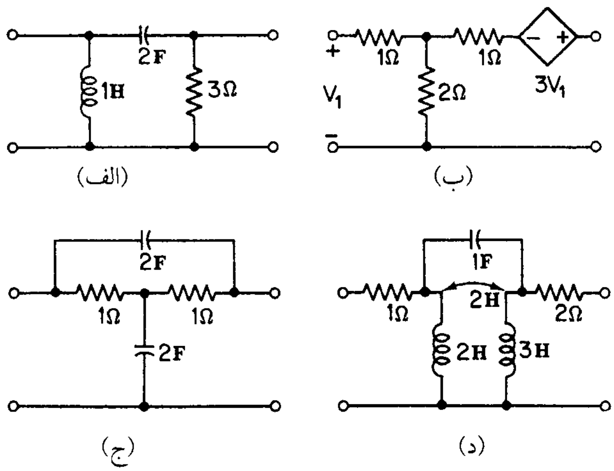
۱۰-۱۴- مسائل مروری

۱- با استفاده از مفاهیم شبکه‌های تک قطبی، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ را در مدارهای الکتریکی بکار رفته در شکل (۱۰-۴۳) بیابید.



شکل (۱۰-۴۳): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

۲- پارامترهای z و y را در ماتریس‌های امپدانسی و ادمیتانسی مربوط به شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۴) محاسبه کنید.

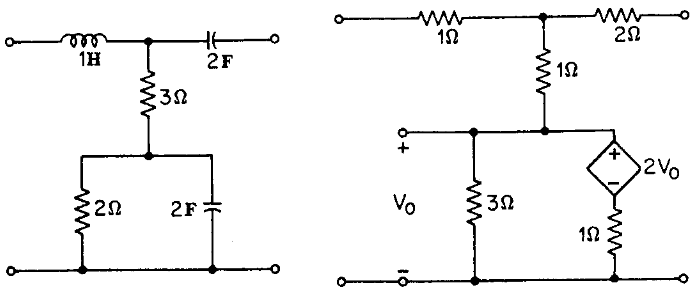


شکل (۱۰-۴۴): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۲)

۳- پارامترهای z را برای شبکه‌های دو قطبی مشخص‌شده در شکل (۱۰-۴۵) به دو روش زیر محاسبه کنید:

الف) با استفاده از روش شرایط تست و معادلات (۱۰-۱۶) تا (۱۰-۱۹)

ب) با تقسیم شبکه‌های مربوطه به دو شبکه مجزا که با یکدیگر سری شده باشند.



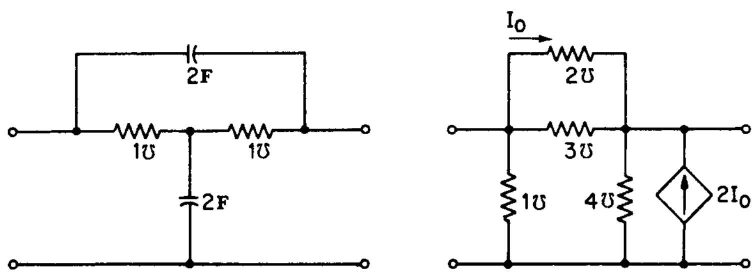
(الف) (ب)

شکل (۱۰-۴۵): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۳)

۴- پارامترهای y را برای شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۶) به دو روش زیر محاسبه نمایید:

الف) با استفاده از روش شرایط تست ارائه‌شده در معادلات (۱۰-۳۵) تا (۱۰-۳۸)

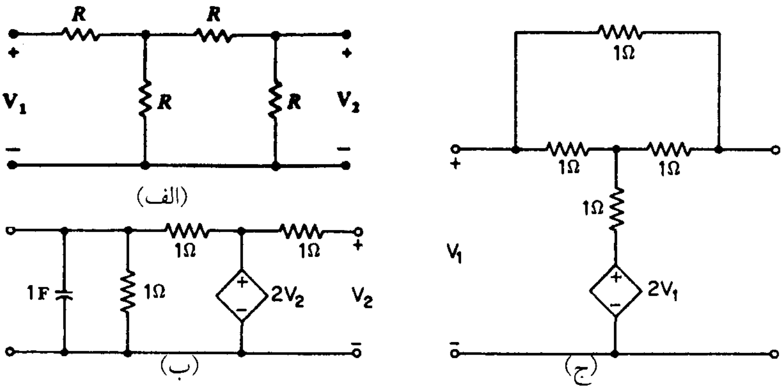
ب) با تقسیم شبکه‌های مربوطه به دو شبکه مجزا که با یکدیگر به‌طور موازی بسته شده باشند



(الف) (ب)

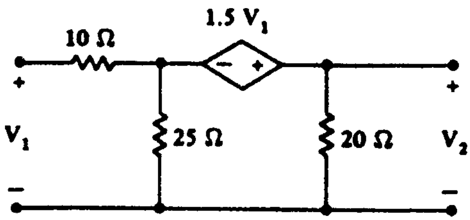
شکل (۱۰-۴۶): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۴)

۵- ماتریس‌های هایبرید **H** و **G** را برای شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۷) بیابید.



شکل (۱۰-۴۷): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۵)

۶- شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۸) موردنظر می‌باشند. برای این شبکه‌ها، ماتریس انتقال **T** را بیابید.



شکل (۱۰-۴۸): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۶)

۷- در صورتی که شبکه‌های دو قطبی به‌طور مجزا با ماتریس‌های زیر مشخص شوند، مطلوبست رسم شبکه‌های دو قطبی در هر حالت

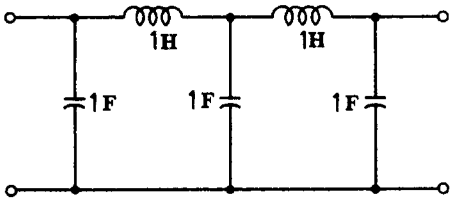
الف) $\mathbf{G}=\begin{bmatrix} s+۴ & ۰ \\ ۱۰ & ۴ \end{bmatrix}$ د) $\mathbf{H}=\begin{bmatrix} ۲۰ & ۰/۳ \\ -۴ & ۰/۱ \end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} ۱+\frac{۴}{s} & -\frac{۲}{s} \\ -\frac{۲}{s} & ۳+\frac{۲}{s} \end{bmatrix}$ ه) $\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۲ \\ ۴۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$

ج) $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$

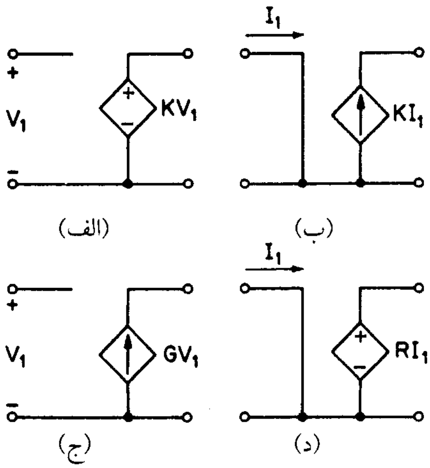
۸- برای شبکه دو قطبی مشخص‌شده در شکل (۱۰-۴۹) هدف آن است که ماتریس امپدانس **Z** را به دو روش مشخص نماییم:

الف) ابتدا برای هر ۵ عضو این شبکه به‌طور مجزا، ماتریس امپدانس را به‌طور مجزا محاسبه کنید. سپس با پشت سر هم قرار گرفتن این ۵ شبکه، به ماتریس امپدانس منتجه برسید.
ب) صحت جواب خود را در قسمت (الف) با استفاده از روش تست به‌طور مستقیم و با استفاده از معادلات (۱۰–۱۶) تا (۱۰–۱۹) مورد ارزیابی قرار دهید.



شکل (۱۰–۴۹): شبکه دو قطبی مربوط به سؤال (۸)

۹– برای شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰–۵۰)، تمام ماتریس‌های ممکنه را که قابل محاسبه هستند، به‌دست آورید.



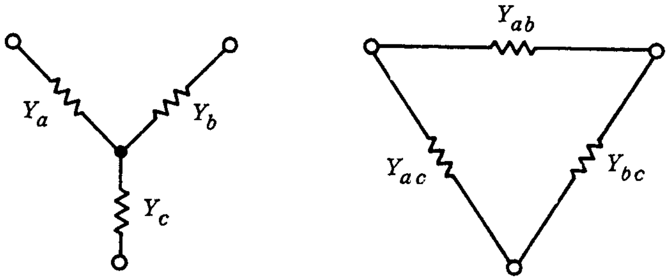
شکل (۱۰–۵۰): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۹)

۱۰– با استفاده از خواص شبکه‌های دو قطبی، نشان دهید که بین پارامترهای Y_a ، Y_b ، و Y_c از مدار ارائه شده در شکل (۱۰–۵۱– الف) با پارامترهای Y_{ab} ، Y_{bc} ، و Y_{ca} از مدار شکل (۱۰–۵۱– ب) باید روابط زیر برقرار می‌باشند تا دو شبکه با هم معادل و هم ارز باشند.

$$Y_a = \frac{Y_{ab}Y_{bc} + Y_{bc}Y_{ca} + Y_{ca}Y_{ab}}{Y_{bc}} \qquad Y_{ab} = \frac{Y_aY_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_b = \frac{Y_{ab}Y_{bc} + Y_{bc}Y_{ca} + Y_{ca}Y_{ab}}{Y_{ac}} \qquad Y_{bc} = \frac{Y_bY_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_c = \frac{Y_{ab}Y_{bc} + Y_{bc}Y_{ca} + Y_{ca}Y_{ab}}{Y_{ca}} \qquad Y_{ca} = \frac{Y_cY_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$



(الف) (ب)

شکل (۱۰-۵۱): شبکه‌های اتصال ستاره و مثلث مربوط به سؤال (۱۰)

راهنمایی: اتصال ستاره و مثلث را به‌صورت یک شبکه دو قطبی چهار سر در نظر بگیرید. به‌عبارت دیگر، یک گره به‌عنوان سر مشترک قطب ورودی و خروجی قرار می‌گیرد.